CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 5 febbraio 2008

Esercizio 1
Si consideri la seguente curva

$$\gamma : \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (1 + \frac{t^3}{3}, 2t, \frac{1}{t}).$$

(1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞.
(2) Determinare curvatura e torsione di γ.
(3) Determinare il piano osculatore nel punto $\gamma(\frac{1}{2})$.
(4) Dire se la curva è piana.

Esercizio 2
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare immagine della parametrizzazione

$$\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{x}(u, v) = (u + v, u^2 + 2uv, v).$$

(1) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nel punto $\underline{x}(u, v)$.
(2) Determinare la natura dei punti di S al variare di (u, v).
(3) Dire se S è una superficie rigata e se è sviluppabile.
(4) Determinare le linee asintotiche di S in ogni punto.
(5) Sia
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$F(x, y, z) = (-x, y, z).$$
Mostrare che $F(S) = S$.
(6) Dire se $F_{|S} : S \to S$ è un'isometria.
(7) Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva regolare contenuta in S definita da
$$\beta(t) = (0, -t^2, -t).$$
Dire se β è una linea asintotica e se è una geodetica.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1y_2 + 3y_1 - 4y_2 - 1 = 0.$$

(1) Riconoscere la conica.
(2) Trovare la chiusura proiettiva della conica e, se esistono, i punti impropri.