CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 14 marzo 2008

Esercizio 1
Si consideri la seguente curva

$$\gamma : \{t \in \mathbb{R} \ |t > 0\} \to \mathbb{R}^3, \ \gamma(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^6}{6}, \frac{t^9}{9}).$$

(1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞.
(2) Determinare curvatura e torsione di γ.
(3) Determinare il triedro di Frenet nel punto $\gamma(1)$.
(4) Determinare il piano osculatore nel punto $\gamma(1)$.

Esercizio 2
Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$.

(1) Mostrare che S è una superficie compatta, regolare e orientabile di classe $\mathcal{C}^\infty$.
(2) Mostrare che la rotazione di un angolo θ nel piano (x, y) è un'isometria globale di S.
(3) Dire se la curva $C = \{(x, y, z) \in S \mid x = 0, y > 0\}$ è una geodetica e se è una linea asintotica.
(4) Calcolare $\int_S K d\sigma$ e $\int_R K d\sigma$, dove K è la curvatura Gaussiana di S e $R = \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0\}$.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 2\sqrt{3}y_1y_2 + 3y_1 + 2y_2 + 1 = 0.$$

(1) Dire se la conica è a centro.
(2) Riconoscere la conica.
(3) Trovare la chiusura proiettiva della conica e, se esistono, i punti impropri.