GEOMETRIA B

Terzo scritto a.a. 08/09: 16 giugno 2009

Esercizio 1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Dato $\varepsilon \neq 0$ sia $\gamma_\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\gamma_\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon\mathbf{t}(s).$$

1) Mostra che γ_ε è una curva regolare.

Supponiamo ora che si abbia $\varepsilon k'(s) > 0$ per ogni $s \in I$.

2) Mostra che la curva γ_ε è biregolare.

3) Determina i vettori della forma $\mathbf{t} + \varepsilon k\mathbf{n} + x\mathbf{b}$ (dove $x \in \mathbb{R}$) che stanno sul piano osculatore di γ_ε traslato nell'origine.

4) Per $s \in I$ fissato, determina l'intersezione tra il piano osculatore di σ traslato nell'origine e il piano osculatore di γ_ε traslato nell'origine.

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'ellissoide di equazione

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{5}y^2 + z^2 = 1,$$

e $\phi\colon (0,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) \to S$ l'applicazione data da

$$\phi(u,v) = (3\sin u\cos v, \sqrt{5}\sin u\sin v, \cos u).$$

1) Mostra che S è una superficie regolare e orientabile.

2) Mostra che ϕ è una parametrizzazione locale di S.

3) Mostra che il punto

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(3,0,1)$$

è un punto ombelicale per S.

Esercizio 3. Sia $GL(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici reali $n \times n$ con determinante non nullo, con la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$. Consideriamo i sottoinsiemi $GL^+(n,\mathbb{R})$ delle matrici con determinante positivo, e $SL(n,\mathbb{R})$ delle matrici con determinante uguale a 1.

1) Mostra che $SL(n,\mathbb{R})$ è un retratto di deformazione di $GL^+(n,\mathbb{R})$.

2) Mostra che $SL(n,\mathbb{R})$ non è un retratto di deformazione di $GL(n,\mathbb{R})$.