GEOMETRIA B

Quarto scritto a.a. 08/09: 8 luglio 2009

Esercizio 1. Sia $\varphi\colon \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u>0\}\to\mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\varphi(u,v) = (u^2v, u^2+3v, u^3),$$

e sia S l'immagine di φ in $\mathbb{R}^3$.

1) Mostrare che S è una superficie regolare.

2) Mostrare che per ogni punto $p\in S$ esiste una retta passante per p e contenuta in S.

3) Dire se S contiene punti ellittici.

Esercizio 2. Sia $S\subset\mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientabile, avente curvatura gaussiana ≤ 0 in ogni punto.

1) Dare un esempio di una superficie S come sopra avente una geodetica $\eta\colon [a,b]\to S$ che sia chiusa e semplice, cioè $\eta(a)=\eta(b)$ e η è iniettiva su $[a,b)$.

2) Sia $R\subset S$ una regione regolare semplice tale che se $\sigma\colon [a,b]\to S$ è la parametrizzazione del bordo di R come poligono curvilineo, σ sia una geodetica in ogni intervallo su cui è regolare. Mostrare che σ ha almeno 3 vertici.

Esercizio 3. Sia $S\subset\mathbb{R}^3$ la sfera con centro nell'origine e raggio 1, e

$$D=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1\}.$$

Sia inoltre $X=S\cup D$. Mostrare che X è connesso per archi, e determinare il suo gruppo fondamentale.