GEOMETRIA B

Quinto scritto a.a. 08/09: 23 settembre 2009

Esercizio 1. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^6 + y^4 + 1)^2 - z^2 = 0\}$, e sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\phi(u, v) = (u, v, u^6 + v^4 + 1).$$

1. Mostrare che S è una superficie regolare.
2. Mostrare che ϕ è una parametrizzazione locale di S.
3. Dire se S è connessa.
4. Calcolare la curvatura gaussiana di S in ogni punto di $\phi(\mathbb{R}^2)$.
5. Mostrare che l'applicazione $f : S \to S$ data da $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ è un'isometria di S in sé.
6. Calcolare la curvatura gaussiana di S in $(0, 0, -1)$.

Esercizio 2. Sia $\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco. Supponiamo che esistano un punto $p \in \mathbb{R}^3$ e una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\sigma(s) - p = f(s)\sigma'(s) \quad \forall s \in (a, b).$$

Mostrare che $f \in \mathcal{C}^\infty(a, b)$ e che il supporto di σ è contenuto in una retta per p.

Esercizio 3. Dire quali tra questi spazi topologici sono tra loro omotopicamente equivalenti.

1. $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
2. $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;
3. $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x = 0\}$
5. $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.