# GEOMETRIA B

Primo scritto a.a. 09/10: 25 gennaio 2010

**Esercizio 1.** Nel piano euclideo, si considerino (e si rappresentino in coordinate cartesiane ortogonali) la simmetria $S$ rispetto alla retta $y = x$, la traslazione $T$ che porta l'origine in $(1,1)$, e la composizione $C := T \circ S$. Si estendano $S$, $T$ e $C$ a proiettività in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, e si trovino i punti fissi di $C$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Si consideri poi la conica $\Gamma \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ di equazione $x_1 x_2 = x_3^2$. Si classifichi $\Gamma$ dal punto di vista proiettivo, affine, euclideo. Si trovi infine $C(\Gamma)$; si mostri che $\Gamma$ è trasformata in $C(\Gamma)$ anche dalla simmetria rispetto ad un opportuno punto.

**Esercizio 2.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.r.l.a. con versore normale $\mathbf{n}$ e curvatura orientata $\tilde{\kappa}$ sempre non nulla.

1) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(s) = \sigma(s) + \frac{1}{\tilde{\kappa}(s)}\mathbf{n}(s).$$

Mostrare che $\gamma$ è una curva regolare sull'intervallo $J := \{s \in I \mid \tilde{\kappa}'(s) \neq 0\}$.

2) Mostrare che se $s \in J$, la retta normale a $\sigma$ in $\sigma(s)$ coincide con la retta tangente a $\gamma$ in $\gamma(s)$.

3) Supponiamo che $\sigma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ sia la parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco della trattrice:

$$\sigma(s) = \left(e^{-s}, s - \sqrt{1-e^{-2s}} + \log\left(1 + \sqrt{1-e^{-2s}}\right)\right).$$

Scrivere esplicitamente $\gamma$.

4) Mostrare che il sostegno di $\gamma$ è contenuto nel grafico del coseno iperbolico $\{(\cosh(y), y)\}$ (ricordiamo che $\cosh(y) = (e^y + e^{-y})/2$ ).

**Esercizio 3.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la sfera centrata nell'origine e di raggio $r$, orientata dal versore normale $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$. Siano $a \in (-r,r)$ e $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(s) = \left(\sqrt{r^2-a^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2-a^2}}\right), \sqrt{r^2-a^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2-a^2}}\right), a\right).$$

1) Verificare che $\sigma$ è una curva p.r.l.a. contenuta in $S$, e calcolarne la curvatura normale e la curvatura geodetica.

2) Sia $R := S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq a\}$. Calcolare l'area di $R$.