GEOMETRIA B

Secondo scritto a.a. 09/10: 22 febbraio 2010

Esercizio 1. Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1) Sia R la rotazione attorno all'origine che porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(0, 1)$. Si estenda R a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e se ne trovino i punti fissi in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Ci sono rette fisse per R in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?

2) Si consideri poi la conica $\Gamma \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ di equazione

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

   Si classifichi Γ dai punti di vista proiettivo e affine. Si trovi $R(\Gamma)$.

3) Sia Γ_0 l'intersezione di Γ con il piano euclideo. Mostrare che Γ_0 è connessa per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.

Esercizio 2. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.r.l.a., biregolare, con curvatura κ, torsione τ, e sistema di riferimento di Frenet $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Sia $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva data da $\beta(s) = \mathbf{n}(s)$ per ogni $s \in I$.

1) Mostrare che β è p.r.l.a. se e solo se $\kappa(s)^2 + \tau(s)^2 = 1$ per ogni $s \in I$.

2) Supponiamo che esista una funzione $\theta\colon I \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^\infty$, tale che $\kappa(s) = \cos\theta(s)$ e $\tau(s) = \sin\theta(s)$ per ogni $s \in I$. Mostrare che β è biregolare e calcolarne la curvatura κ_β e il sistema di riferimento di Frenet $\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta$ in funzione di θ e di $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$.

1) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

2) Mostrare che l'applicazione $F\colon S \to S^2$ data da $F(p) = p/||p||$ è un diffeomorfismo tra S e la sfera unitaria.

3) Mostrare che S è compatta e connessa, e calcolare l'integrale su S della curvatura gaussiana.

4) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $\sigma(t) = g(t)\,(\cos t, \sin t, 0)$, dove

$$g(t) = \left((\cos t)^4 + (\sin t)^4\right)^{-1/4}.$$

   Mostrare che $\sigma(\mathbb{R}) \subset S$ e calcolare $||\sigma'(\pi/4)||$ e $||(F \circ \sigma)'(\pi/4)||$. F è un'isometria?