GEOMETRIA B

Terzo scritto a.a. 09/10: 11 giugno 2010

Esercizio 1. Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1) Sia S la simmetria rispetto al punto $(-1, 0)$. Si estenda S a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si trovino punti fissi e rette fisse.

2) Si consideri poi la conica $\Gamma \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ di equazione

$$x_2^2 - 2x_3^2 - x_1x_3 = 0.$$

Si classifichi Γ dai punti di vista proiettivo e affine. Si trovi $S(\Gamma)$.

3) Sia Γ_0 l'intersezione di Γ con il piano euclideo, e sia T l'unione di Γ_0 con l'asse x. Si mostri che T è connesso per archi e se ne calcoli il gruppo fondamentale.

Esercizio 2. Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}, t\right).$$

1) Mostrare che σ è una curva biregolare.

2) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra $t = 0$ e $t = 1$.

3) Mostrare che $\kappa(t) = \tau(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dove κ è la curvatura e τ è la torsione di σ.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy^2\}$.

1) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

2) Mostrare che se K è la curvatura gaussiana di S, si ha $K \leq 0$ sempre, e che $K = 0$ soltanto per i punti di S con $y = 0$.

3) Mostrare che $(0, 0, 0)$ è un punto planare di S.

4) Determinare le direzioni principali nei punti di S con curvatura gaussiana nulla.