Curve

Curve (differenziabili) parametrizzate in $\mathbb{R}^n$; curve come classi di equivalenza di curve parametrizzate; sostegno o traccia di una curva; curve orientate. Vettore tangente a una curva parametrizzata in un punto; punti singolari; curve regolari.

Curve rettificabili; ogni curva di classe C^1 è rettificabile. Lunghezza d'arco; una curva è regolare se e solo se può essere parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (in modo unico a meno di cambio di orientazione e di traslazione).

Versore tangente e curvatura di una curva regolare; una curva regolare ha curvatura nulla se e solo se il suo sostegno è contenuto in una retta. Curve biregolari; raggio di curvatura; versore normale e piano osculatore.

Curve regolari in $\mathbb{R}^2$: curvatura orientata, versore normale orientato e formule di Frenet piane; una curva orientata è univocamente determinata, a meno di rototraslazione, dalla curvatura orientata.

Curve biregolari in $\mathbb{R}^3$: versore binormale e torsione; la torsione è nulla se e solo se la curva è piana; formule di Frenet. Teorema fondamentale della teoria locale delle curve: una curva biregolare è univocamente determinata, a meno di rototraslazione, dalla curvatura e dalla torsione.

Formule per il sistema di riferimento di Frenet, la curvatura (orientata) e la torsione anche nel caso di curve (regolari in $\mathbb{R}^2$ o biregolari in $\mathbb{R}^3$) non necessariamente parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco.

Omotopia e gruppo fondamentale

Omotopia di funzioni continue (assoluta e relativa a un sottospazio); l'omotopia è una relazione di equivalenza ed è compatibile con le composizioni.

Definizione ed esempi di categorie; isomorfismi in una categoria. Equivalenze omotopiche; due spazi topologici sono omotopicamente equivalenti se e solo se sono isomorfi nella categoria omotopa degli spazi topologici (quindi l'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza). Spazi topologici contraibili; ogni sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Retratti e retrazioni; un retratto in uno spazio di Hausdorff è chiuso. Retratti di deformazione e retratti di deformazione forte; ogni retratto di deformazione è un'equivalenza omotopica. S^n è un retratto di deformazione forte di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Un punto in uno spazio topologico è un retratto di deformazione se e solo se lo spazio è contraibile.

Cammini o archi in uno spazio topologico; equivalenza di cammini come omotopia relativa agli estremi. Prodotto di cammini e cammino inverso; prodotto indotto sulle classi di equivalenza di cammini e sue proprietà.

Gruppo fondamentale di uno spazio topologico con punto base. Invarianza, a meno di isomorfismo, del gruppo fondamentale dal punto base in una stessa componente connessa per archi. Spazi topologici semplicemente connessi.

Omomorfismo tra i gruppi fondamentali indotto da una funzione continua. Definizione ed esempi di funtori; ogni funtore preserva gli isomorfismi. Il gruppo fondamentale come funtore dalla categoria degli spazi topologici con punto base alla categoria dei gruppi. Un retratto induce un omomorfismo iniettivo tra i gruppi fondamentali.

Come cambia l'omomorfismo tra i gruppi fondamentali indotto da una funzione continua variando il punto base in una stessa componente connessa per archi o cambiando la funzione con una omotopa. Un'equivalenza omotopica induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali.

Il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a $\mathbb{Z}$. S^1 non è un retratto di D^2; ogni funzione continua di D^2 in sè ha un punto fisso. Il gruppo fondamentale del prodotto di due spazi topologici è isomorfo al prodotto dei gruppi fondamentali dei due spazi.

Prima parte del teorema di Van Kampen: se uno spazio topologico è unione di due aperti connessi per archi e con intersezione connessa per archi, il gruppo fondamentale dello spazio è generato dalle immagini dei gruppi fondamentali dei due aperti. S^n è semplicemente connesso per $n > 1$.