Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione dell'11-03-2020
(Sezioni 2 e 3 delle dispense)

Definizione-Proposizione 2.7

$N := \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ è un sottomodulo di M:

- $0 = \sum_{\lambda\in\Lambda} 0 \in N$, dato che $0 \in N_\lambda \; \forall\, \lambda \in \Lambda$;
- se $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ e $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda \in N$, anche

  $$x + y = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda + y_\lambda) \in N,$$

  dato che $x_\lambda + y_\lambda \in N_\lambda \; \forall\, \lambda \in \Lambda$ e $x_\lambda + y_\lambda = 0$ se $x_\lambda = y_\lambda = 0$ (per cui solo un numero finito di addendi sono non nulli);
- se $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \in N$ e $a \in A$, anche

  $$ax = \sum_{\lambda\in\Lambda} ax_\lambda \in N,$$

  dato che $ax_\lambda \in N_\lambda \; \forall\, \lambda \in \Lambda$ e $ax_\lambda = 0$ se $x_\lambda = 0$ (per cui solo un numero finito di addendi sono non nulli).

Definizione-Proposizione 2.8

IU è un sottomodulo di M:

- $0 \in IU$ (esercizio);
- $x, y \in IU$ implica $x + y \in IU$ (esercizio);
- $a \in A$ e $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in IU$
  (con $a_i \in I$ e $x_i \in U \ \forall\, i = 1, \dots, n$)
  implica $ax \in IU$ perché

$$ax = a \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a(a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} (aa_i) x_i$$

  e $aa_i \in I$, dato che I è un ideale sinistro di A.

Definizione-Proposizione 2.9

$(N : U)$ è un ideale sinistro di A:

- $0 \in (N : U)$ (esercizio);
- $a, b \in (N : U)$ implica $a + b \in (N : U)$ (esercizio);
- $a \in A$ e $b \in (N : U)$ implica $ab \in (N : U)$ perché $\forall\, x \in U$

$$(ab)x = a(bx) = a0 = 0.$$

Definizione-Proposizione 2.9

$(N : U)$ è un ideale sinistro di A:

- $0 \in (N : U)$ (esercizio);
- $a, b \in (N : U)$ implica $a + b \in (N : U)$ (esercizio);
- $a \in A$ e $b \in (N : U)$ implica $ab \in (N : U)$ perché $\forall\, x \in U$

$$(ab)x = a(bx) = a0 = 0.$$

$(N : P)$ è anche un ideale destro di A:

- $a \in A$ e $b \in (N : P)$ implica $ba \in (N : P)$ perché $\forall\, x \in P$

$$(ba)x = b(ax) = 0,$$

dato che $ax \in P$.

Definizione-Proposizione 2.12

Indichiamo per ora con $\langle U \rangle_A$ il sottomodulo del punto (3).

- $\sum_{x \in U} Ax \subseteq AU$ perché $Ax \subseteq AU\ \forall\, x \in U$ e AU è chiuso rispetto alla somma.
- $AU \subseteq \langle U \rangle_A$ perché $AU \subseteq N$ per ogni sottomodulo N di M contenente U, dato che se

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in AU$$

  (con $a_i \in A$ e $x_i \in U \subseteq N$) allora $y \in N$.
- $\langle U \rangle_A \subseteq \sum_{x \in U} Ax$ perché $\sum_{x \in U} Ax$ è un sottomodulo di M contenente U.

Resta da verificare che $\langle U \rangle_A$ è il più piccolo sottomodulo di M contenente U (esercizio).

Proposizione 3.11 (parti 1 e 2)

1. $f(M')$ è un sottogruppo di N perché M' è un sottogruppo di M e f è un omomorfismo di gruppi.
   Resta da vedere che $ay \in f(M')$ $\forall\, a \in A$ e $\forall\, y \in f(M')$: esiste $x \in M'$ tale che $y = f(x)$, quindi

   $$ay = af(x) = f(ax) \in f(M'),$$

   dato che f è A-lineare e M' è un sottomodulo di M.

Proposizione 3.11 (parti 1 e 2)

1. $f(M')$ è un sottogruppo di N perché M' è un sottogruppo di M e f è un omomorfismo di gruppi.
   Resta da vedere che $ay \in f(M')$ $\forall\, a \in A$ e $\forall\, y \in f(M')$: esiste $x \in M'$ tale che $y = f(x)$, quindi
   $$ay = af(x) = f(ax) \in f(M'),$$
   dato che f è A-lineare e M' è un sottomodulo di M.
2. $f^{-1}(N')$ è un sottogruppo di M perché N' è un sottogruppo di N e f è un omomorfismo di gruppi.
   Resta da vedere che $ax \in f^{-1}(N')$ $\forall\, a \in A$ e $\forall\, x \in f^{-1}(N')$: per definizione $f(x) \in N'$, quindi
   $$f(ax) = af(x) \in N' \text{ (cioè } ax \in f^{-1}(N')),$$
   dato che f è A-lineare e N' è un sottomodulo di N.

Proposizione 3.11 (parte 3)

- $\langle f(U)\rangle_A \subseteq f(\langle U\rangle_A)$

  Per la parte 1 $f(\langle U\rangle_A)$ è un sottomodulo di N (dato che $\langle U\rangle_A$ è un sottomodulo di M).

  Inoltre $f(U) \subseteq f(\langle U\rangle_A)$ perché $U \subseteq \langle U\rangle_A$.

  Per concludere basta ricordare che $\langle f(U)\rangle_A$ è il più piccolo sottomodulo di N contenente $f(U)$.

- $f(\langle U\rangle_A) \subseteq \langle f(U)\rangle_A$

  Equivalentemente va dimostrato che $\langle U\rangle_A \subseteq f^{-1}(\langle f(U)\rangle_A)$.

  Per la parte 2 $f^{-1}(\langle f(U)\rangle_A)$ è un sottomodulo di M (dato che $\langle f(U)\rangle_A$ è un sottomodulo di N).

  Inoltre $U \subseteq f^{-1}(\langle f(U)\rangle_A)$ perché $f(U) \subseteq \langle f(U)\rangle_A$.

  Per concludere basta ricordare che $\langle U\rangle_A$ è il più piccolo sottomodulo di M contenente U.