Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione dell'08-04-2020

Sottoinsiemi G-stabili

Un'azione di G su X ne induce una naturale di G su $\mathcal{P}(X)$:

$$G \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \qquad (g, X') \mapsto gX' := \{gx \,:\, x \in X'\}$$

(la verifica che questa è davvero un'azione è lasciata per esercizio).

Definizione

Un sottoinsieme X' di un G-insieme X è G-stabile o G-invariante se $gX' = X' \; \forall \, g \in G$.

Osservazione

Un sottoinsieme G-stabile di un G-insieme è in modo naturale un G-insieme (per restrizione dell'azione a $G \times X'$).

Osservazione

Un sottoinsieme X' di un G-insieme X è G-stabile se e solo se $gX' \subseteq X' \; \forall \, g \in G$. Infatti, se quest'ultima condizione è soddisfatta, allora $\forall \, g \in G$ si ha anche (dato che $g^{-1}X' \subseteq X'$)

$$X' = 1X' = (gg^{-1})X' = g(g^{-1}X') \subseteq gX'.$$

Sottogruppi normali e sottogruppi caratteristici

Sia H un sottogruppo di G ($H < G$).

- H è G-stabile (rispetto all'azione per coniugio) $\iff$ H è $\mathrm{Int}(G)$-stabile $\iff$ $gHg^{-1} = H \; \forall\, g \in G$ $\iff$ $gHg^{-1} \subseteq H$ $\forall\, g \in G$; in questo caso si dice che H è normale in G ($H \triangleleft G$).
- H è $\mathrm{Aut}(G)$-stabile $\iff$ $f(H) = H \; \forall\, f \in \mathrm{Aut}(G)$ $\iff$ $f(H) \subseteq H \; \forall\, f \in \mathrm{Aut}(G)$; in questo caso si dice che H è caratteristico in G.

Osservazione

Ogni sottogruppo caratteristico è normale, ma non viceversa. Per esempio, i sottogruppi non banali di C_2^2 sono normali ma non caratteristici.

Esempio

H è caratteristico in G se l'unico sottogruppo di G isomorfo a H è H stesso. Questo succede in particolare se H è l'unico sottogruppo di G del suo ordine. Quindi per esempio ogni sottogruppo di un gruppo ciclico finito è caratteristico.

Morfismi di G-insiemi

Se X e Y sono G-insiemi, una funzione $f\colon X \to Y$ è un morfismo di G-insiemi (o di azioni di G) se $f(gx) = gf(x)\ \forall\, g \in G$ e $\forall\, x \in X$. f è un isomorfismo di G-insiemi se è anche biunivoco.

Osservazione

id_X è un isomorfismo; se f è un isomorfismo, anche f^{-1} lo è; la composizione di (iso)morfismi è un (iso)morfismo; l'isomorfismo è una relazione di equivalenza. Un morfismo $f\colon X \to Y$ è un isomorfismo se e solo se esiste un morfismo $f'\colon Y \to X$ tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_Y$.

Esempio

Se X' è un sottoinsieme G-stabile di un G-insieme X, l'inclusione $X' \to X$ è un morfismo di G-insiemi.

Esempio

$H < G \implies G \to G/H$, $a \mapsto aH$ è un morfismo di G-insiemi (rispetto alla traslazione), e è un isomorfismo $\iff H = \{1\}$.

Orbite di un'azione

Su un G-insieme X la relazione definita da

$$x \sim y \iff \exists g \in G \, : \, y = gx.$$

è di equivalenza, dato che valgono le proprietà

- riflessiva: $x = 1x$;
- simmetrica: $y = gx \implies x = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}y$;
- transitiva: $y = gx$, $z = hy \implies z = h(gx) = (hg)x$.

La classe di equivalenza di $x \in X$ è il sottoinsieme

$$Gx := \{gx \, : \, g \in G\}$$

di X e si dice orbita di x (rispetto all'azione di G).

Osservazione

Un sottoinsieme di un G-insieme è G-stabile se e solo se è unione (necessariamente disgiunta) di orbite.

Azioni transitive

Un'azione di G su X è transitiva se X è costituito da una sola orbita; si dice anche che X è un G-insieme omogeneo.

Esempio

Se $H < G$, il G-insieme G/H (rispetto all'azione per traslazione a sinistra) è omogeneo: $\forall\, C \in G/H\; \exists\, g \in G$ tale che $C = gH$, cioè C appartiene all'orbita di H.

Esempio

Rispetto all'azione per coniugio di G su G, l'orbita di $a \in G$ è la classe di coniugio $[a] := \{gag^{-1} : g \in G\}$ di a.
Si ha $[a] = \{a\} \iff a \in Z(G)$, e in particolare $[1] = \{1\}$.
Dunque l'azione è transitiva $\iff G = \{1\}$.

Quoziente per un'azione

Data un'azione sinistra (risp. destra) di G su X, l'insieme delle orbite (cioè l'insieme quoziente di X rispetto a $\sim$) si indica con

$$G\backslash X := \{Gx \,:\, x \in X\} \qquad (\text{risp. } X/G := \{xG \,:\, x \in X\}).$$

Esempio

Se $H < G$, l'azione di H su G per moltiplicazione a sinistra $H \times G \to G$ (risp. a destra $G \times H \to G$) è tale che

$$H\backslash G = \{Ha \,:\, a \in G\} \qquad (\text{risp. } G/H := \{aH \,:\, a \in G\}).$$

Osservazione

Considerando $G\backslash X$ come un G-insieme con azione banale, la proiezione al quoziente $X \to G\backslash X$, $x \mapsto Gx$ è un morfismo suriettivo di G-insiemi, e è un isomorfismo $\iff$ anche l'azione su X è banale.

Stabilizzatori, azioni libere e azioni fedeli

Se X è un G-insieme, lo stabilizzatore di $x \in X$ è

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G \,:\, gx = x\} < G,$$

perché $1 \in \mathrm{Stab}(x)$ e $g, h \in \mathrm{Stab}(x) \implies gh^{-1} \in \mathrm{Stab}(x)$: $(gh^{-1})x = (gh^{-1})(hx) = g((h^{-1}h)x) = gx = x$.

Definizione

Un'azione di G su X è libera (risp. fedele) se $\mathrm{Stab}(x) = \{1\}$ $\forall\, x \in X$ (risp. $\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) = \{1\}$).

Osservazione

Se l'azione è data da un omomorfismo di gruppi $\varphi \colon G \to S(X)$,

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \,:\, gx = x \ \forall\, x \in X\} = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x).$$

Se $K \lhd G$ e $K \subseteq \ker(\varphi)$, per il teorema di omomorfismo si ottiene un omomorfismo $G/K \to S(X)$, iniettivo se $K = \ker(\varphi)$ (quindi $G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$ agisce fedelmente su X).

Centralizzatore di un elemento

Lo stabilizzatore di $a \in G$ rispetto all'azione per coniugio è

$$C(a) = C_G(a) := \{g \in G \,:\, gag^{-1} = a\} = \{g \in G \,:\, ga = ag\},$$

detto centralizzatore o (centralizzante) di a in G.

Osservazione

Poiché $C(1) = G$, l'azione per coniugio è libera $\iff G = \{1\}$.
D'altra parte l'azione è fedele $\iff$

$$\{1\} = \bigcap_{a \in G} C(a) = \ker(\Gamma \colon G \to S(G)) = Z(G).$$

Dunque l'azione per coniugio è fedele ma non libera se $G \neq \{1\}$ e $Z(G) = \{1\}$ (per esempio, se $G = S_3$).
Ovviamente ogni azione libera è fedele.

Normalizzatore di un sottogruppo

Considerando $\mathcal{P}(G)$ come un G-insieme con l'azione indotta dal coniugio, lo stabilizzatore di $H < G$ è

$$N(H) = N_G(H) := \{g \in G \,:\, gHg^{-1} = H\},$$

detto normalizzatore o (normalizzante) di H in G.

Osservazione

Chiaramente $N(H)$ soddisfa le seguenti condizioni:

- $H \triangleleft N(H) < G$;
- $H \triangleleft K < G \implies K \subseteq N(H)$.

Dunque $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G in cui H è normale. In particolare $N(H) = G \iff H \triangleleft G$.

Relazione tra gli stabilizzatori in un orbita

Proposizione

Se X è un G-insieme, $\forall\, g \in G$ *e* $\forall\, x \in X$

$$\mathrm{Stab}(gx) = g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}.$$

In particolare $\mathrm{Stab}(gx) \cong \mathrm{Stab}(x)$.

Dimostrazione.

$\mathrm{Stab}(gx) \subseteq g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$: $h \in \mathrm{Stab}(gx) \implies gx = hgx \implies x = g^{-1}gx = g^{-1}hgx \implies h' := g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}(x) \implies h = gh'g^{-1} \in g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$.

$g\mathrm{Stab}(x)g^{-1} \subseteq \mathrm{Stab}(gx)$: $h = gh'g^{-1} \in g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$ (con $h' \in \mathrm{Stab}(x)$) $\implies hgx = gh'g^{-1}gx = gh'x = gx \implies h \in \mathrm{Stab}(gx)$. $\square$

Esempio

$C(gag^{-1}) = gC(a)g^{-1}\ \forall\, g, a \in G$.

Generalizzazione del teorema di Cayley

Corollario

$H < G \implies \ker(L\colon G \to S(G/H)) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ *è il più grande sottogruppo normale di G contenuto in H.*

Dimostrazione.

$\ker(L) \lhd G$ perché nucleo di un omomorfismo di gruppi. Poiché

$$\mathrm{Stab}(H) = \{g \in G \,:\, gH = H\} = H,$$

e tenendo conto che $\ker(L) = \bigcap_{C \in G/H} \mathrm{Stab}(C)$, per la Proposizione precedente si ha

$$\ker(L) = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Stab}(gH) = \bigcap_{g \in G} g\mathrm{Stab}(H)g^{-1} = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \subseteq H.$$

Resta da dimostrare che $K \lhd G$ e $K \subseteq H \implies K \subseteq \ker(L)$:

$K = \bigcap_{g \in G} gKg^{-1} \subseteq \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \ker(L)$. $\square$

Applicazione

Se $L \colon G \to S(G/H)$ è iniettivo, $G \cong \mathrm{im}(L) < S(G/H)$. Dunque, se $H \neq G$ e $S(G/H)$ non contiene sottogruppi isomorfi a G,

$$\{1\} \subsetneq \ker(L) \subseteq H \subsetneq G,$$

e in particolare G non è semplice (dato che $\ker(L) \lhd G$).

Osservazione

Per il teorema di Lagrange $S(G/H)$ non contiene sottogruppi isomorfi a G se G è finito e $\#G \nmid [G : H]!$.

Esempio

Sia $H < G$. Allora G non è semplice in ciascuno dei seguenti casi.

- $\#G = 36$, $\#H = 9$: $[G : H] = 4$ e $36 \nmid 4! = 24$.
- $\#G = 80$, $\#H = 16$: $[G : H] = 5$ e $80 \nmid 5! = 120$.
- $\#G = 150$, $\#H = 25$: $[G : H] = 6$ e $150 \nmid 6! = 720$.