

# Programma di Algebra 1

A. A. 2022/2023

Docenti: Alberto Canonaco e Filippo Favale

Richiami su insiemi e funzioni: composizione di funzioni e associatività della composizione; immagine attraverso una funzione di un sottoinsieme del dominio e controimmagine di un sottoinsieme del codominio. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche e loro stabilità rispetto alla composizione; funzione inversa di una funzione biunivoca. Cardinalità di un insieme; una funzione tra due insiemi finiti con la stessa cardinalità è iniettiva se e solo se è suriettiva. Cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni e delle funzioni iniettive tra due insiemi finiti; la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi con  $m$  elementi in un insieme con  $n$  elementi è data dal coefficiente binomiale  $\binom{n}{m}$ .

Richiami su relazioni di equivalenza: definizione, classe di equivalenza di un elemento, insieme quoziente e proiezione naturale al quoziente; corrispondenza tra relazioni di equivalenza su un insieme e partizioni dell'insieme; corrispondenza tra funzioni definite sull'insieme quoziente e funzioni costanti sulle classi di equivalenza.

Richiami su relazioni d'ordine; assioma della scelta e lemma di Zorn (solo enunciato).

Richiami su numeri naturali, interi, razionali, reali e complessi: proprietà delle operazioni di somma e prodotto e della relazione d'ordine. Principio del buon ordinamento dei numeri naturali.

Divisibilità tra numeri interi e sue proprietà; divisione con resto. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di due interi e loro proprietà; per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$  si ha  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{mcd}(a, b)\mathbb{Z}$  e  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{mcm}(a, b)\mathbb{Z}$ . Numeri primi; un numero primo divide il prodotto di due interi se e solo se divide uno dei due fattori. Teorema fondamentale dell'aritmetica; i numeri primi sono infiniti. Espressione di  $\text{mcd}(a, b)$  e  $\text{mcm}(a, b)$  in termini delle fattorizzazioni di  $a$  e di  $b$ . Algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore. Soluzioni intere dell'equazione  $ax + by = c$ .

Congruenza modulo  $n$  (intero positivo) come relazione di equivalenza su  $\mathbb{Z}$ ; insieme quoziente  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , definizione di somma e prodotto su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  e loro proprietà. Soluzioni di congruenze e di equazioni in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ; sistemi di congruenze e teorema cinese del resto.

Definizione di gruppo e primi esempi: gruppi additivi  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  e gruppi moltiplicativi  $\mathbb{Q}^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$  (tutti commutativi o abeliani); gruppo delle funzioni da un insieme a un gruppo; gruppo  $S(X)$  delle permutazioni di un insieme  $X$  con operazione data dalla composizione di funzioni (non abeliano se  $\#X > 2$ ). Prime proprietà: unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un

elemento; inverso dell'inverso di un elemento e del prodotto di due elementi; in un gruppo la moltiplicazione a sinistra o a destra per un fissato elemento è una permutazione del gruppo; leggi di cancellazione a sinistra e a destra.

Sottogruppi: definizione ed esempi; criteri per verificare se un sottoinsieme di un gruppo è un sottogruppo. Sottogruppo generato da un elemento e gruppi ciclici; un sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico; classificazione dei sottogruppi di  $\mathbb{Z}$  e di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . L'intersezione di sottogruppi è un sottogruppo; sottogruppo generato da un sottoinsieme di un gruppo e insieme di generatori per un gruppo. Sottogruppi di gruppi di permutazioni; gruppo delle isometrie del piano e suo sottogruppo  $O_2(\mathbb{R})$  delle isometrie che fissano l'origine; gruppo diedrale  $D_n$  come sottogruppo di  $O_2(\mathbb{R})$  costituito dagli elementi che fissano un poligono regolare di  $n$  lati centrato nell'origine; descrizione puramente algebrica di  $D_n$ . Gruppo  $Q$  delle unità dei quaternioni.

Ordine di un gruppo; l'ordine di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$  è dato dal valore della funzione di Eulero  $\varphi(n)$ . Ordine di un elemento di un gruppo; l'ordine di un elemento è uguale all'ordine del sottogruppo da esso generato; un gruppo di ordine  $n$  è ciclico se e solo se contiene un elemento di ordine  $n$ ; ordine di una potenza di un elemento.

Centro di un gruppo e centralizzante di un elemento: sono sottogruppi; il centro è l'intersezione dei centralizzanti; un elemento appartiene al centro se e solo se il suo centralizzante è tutto il gruppo; un gruppo è abeliano se e solo se coincide con il centro.

Omomorfismi di gruppi: definizione ed esempi; un omomorfismo preserva l'elemento neutro e le potenze di un elemento; la composizione di omomorfismi è un omomorfismo. Isomorfismi di gruppi; la composizione di due isomorfismi e l'inverso di un isomorfismo sono isomorfismi; l'isomorfismo di gruppi è una relazione di equivalenza, che preserva proprietà come essere abeliano o ciclico. Endomorfismi e automorfismi di un gruppo; gruppo degli automorfismi di un gruppo. Immagini e controimmagini di sottogruppi attraverso un omomorfismo sono sottogruppi; l'immagine di un sottogruppo generato da un sottoinsieme è generata dall'immagine del sottoinsieme; immagine e nucleo di un omomorfismo; un omomorfismo è iniettivo se e solo se il nucleo è banale; l'immagine di un omomorfismo iniettivo è isomorfa al gruppo di partenza. Ordine dell'immagine di un elemento attraverso un omomorfismo (iniettivo). Classificazione degli omomorfismi (iniettivi) da  $\mathbb{Z}$  e da  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  verso un gruppo qualunque. Un gruppo ciclico infinito è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , un gruppo ciclico di ordine  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Prodotto di gruppi; il prodotto di due gruppi è abeliano se e solo se entrambi i fattori sono abeliani; teorema cinese del resto (per gruppi). Ordine di un elemento in un prodotto.

Classi laterali (sinistre e destre) di un sottogruppo in un gruppo; tutte le classi laterali di un sottogruppo hanno la stessa cardinalità del sottogruppo; le classi laterali (sinistre o destre) di un sottogruppo formano una partizione del gruppo;

descrizione della corrispondente relazione di equivalenza. Corrispondenza biunivoca tra l'insieme  $G/H$  delle classi laterali sinistre e l'insieme  $H\backslash G$  delle classi laterali destre di un sottogruppo  $H$  di un gruppo  $G$ ; indice di un sottogruppo. Teorema di Lagrange; un gruppo di ordine un numero primo è ciclico; teorema di Eulero e (piccolo) teorema di Fermat. Classificazione (a meno di isomorfismo) dei gruppi di ordine minore di 8.

Coniugio e automorfismi interni. Sottogruppi normali: definizione ed esempi; criteri per verificare se un sottogruppo è normale. Ogni sottogruppo di indice 2 è normale; un sottogruppo contenuto nel centro è normale; la controimmagine di un sottogruppo normale attraverso un omomorfismo è normale (in particolare, il nucleo di un omomorfismo è normale); l'immagine di un sottogruppo normale attraverso un omomorfismo suriettivo è normale; l'intersezione di sottogruppi normali è normale.

Prodotto  $HK$  di due sottogruppi  $H$  e  $K$  di un gruppo  $G$ ; se  $H$  e  $K$  sono finiti,  $\#(HK) = \frac{(\#H)(\#K)}{\#(H \cap K)}$ ;  $HK$  è un sottogruppo di  $G$  se e solo se  $HK = KH$ , vero se  $H$  o  $K$  è normale;  $HK$  è normale se  $H$  e  $K$  lo sono. Se  $H$  e  $K$  sono normali in  $G$  e  $H \cap K = \{1\}$ , allora  $HK \cong H \times K$  (e  $HK = G$  se  $\#G = (\#H)(\#K) < \infty$ ).

I gruppi di permutazioni di insiemi con la stessa cardinalità sono isomorfi. Gruppo simmetrico  $S_n = S(\{1, \dots, n\})$ : definizione di ciclo; cicli disgiunti commutano; ogni elemento di  $S_n$  si può scrivere in modo essenzialmente unico come prodotto di cicli disgiunti; ordine di una permutazione; coniugio in  $S_n$ ;  $S_n$  è generato dalle trasposizioni. Definizione del segno di una permutazione; il segno definisce un omomorfismo da  $S_n$  al gruppo moltiplicativo  $\{1, -1\}$  con nucleo il gruppo alterno  $A_n$  (permutazioni pari), sottogruppo di indice 2 di  $S_n$  (se  $n > 1$ ); le trasposizioni sono permutazioni dispari; una permutazione è pari (rispettivamente dispari) se e solo se è prodotto di un numero pari (rispettivamente dispari) di trasposizioni, se e solo se nella rappresentazione come prodotto di cicli disgiunti ci sono un numero pari (rispettivamente dispari) di cicli di lunghezza pari;  $A_n$  è generato dai 3-cicli. Teorema di Cayley: ogni gruppo  $G$  è isomorfo a un sottogruppo di  $S(G)$ .

Gruppo quoziente di un gruppo per un sottogruppo normale; se  $H$  è normale in  $G$ , la proiezione naturale da  $G$  a  $G/H$  è un omomorfismo suriettivo con nucleo  $H$ . Sottogruppo (normale)  $[G, G]$  dei commutatori di un gruppo  $G$ ; un quoziente  $G/H$  (con  $H$  normale in  $G$ ) è abeliano se e solo se  $[G, G] \subseteq H$ .

Corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi (normali) di un gruppo  $G$  che contengono un sottogruppo normale  $H$  e i sottogruppi (normali) di  $G/H$ . Teorema di omomorfismo per gruppi; dato  $H$  normale in  $G$ , gli omomorfismi da  $G/H$  a un altro gruppo  $G'$  sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi da  $G$  a  $G'$  il cui nucleo contiene  $H$ . Primo teorema di isomorfismo per gruppi; il nucleo di un omomorfismo verso un gruppo abeliano contiene il sottogruppo dei commutatori. Secondo e terzo teorema di isomorfismo per gruppi.

Definizione di anello e primi esempi:  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (commutativi), anelli di matrici, anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano (non commutativi in generale). Prime proprietà: unicità dell'elemento neutro rispetto al prodotto e dell'inverso di un elemento invertibile o unità; la moltiplicazione per 0 dà 0; un anello è banale se e solo se  $1 = 0$ . Gruppo moltiplicativo  $A^*$  delle unità di un anello  $A$ ; anelli con divisione e campi; anello  $\mathbb{H}$  dei quaternioni. Anello delle funzioni da un insieme a un anello; prodotto di anelli. Divisori di zero e domini (di integrità); ogni campo è un dominio (ma non viceversa); ogni dominio finito è un campo;  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (con  $n > 0$ ) è un dominio o un campo se e solo se  $n$  è primo.

Sottoanelli: definizione ed esempi; criteri per verificare se un sottoinsieme di un anello è un sottoanello; l'intersezione di sottoanelli è un sottoanello; un sottoanello di un dominio è un dominio.

Omomorfismi di anelli: definizione ed esempi; un omomorfismo preserva gli elementi neutri e le potenze di un elemento; la composizione di omomorfismi è un omomorfismo. Per ogni anello  $A$  esiste un unico omomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}$  ad  $A$ . Isomorfismi di anelli; la composizione di due isomorfismi e l'inverso di un isomorfismo sono isomorfismi; l'isomorfismo di anelli è una relazione di equivalenza, che preserva proprietà come essere commutativo, con divisione, campo o dominio. Immagine e controimmagine di sottoanelli attraverso un omomorfismo sono sottoanelli; l'immagine di un omomorfismo iniettivo è isomorfa all'anello di partenza.

Anello  $A[X]$  dei polinomi a coefficienti in un anello  $A$ ;  $A[X]$  è commutativo se e solo se  $A$  lo è;  $A$  come sottoanello di  $A[X]$ ; grado di un polinomio non nullo; se  $f, g \in A[X]$  sono non nulli e  $A$  è un dominio,  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ ;  $A[X]$  è un dominio se e solo se  $A$  lo è, e in questo caso  $A[X]^* = A^*$ .

Campo dei quozienti (o delle frazioni) di un dominio; il campo dei quozienti di  $\mathbb{Z}$  è  $\mathbb{Q}$ ; campo delle funzioni razionali  $K(X)$  (su un campo  $K$ ) come campo dei quozienti di  $K[X]$ .

Ideali sinistri, ideali destri e ideali (bilateri): definizione ed esempi; criteri per verificare se un sottoinsieme di un anello è un ideale. Un ideale (sinistro o destro) è tutto l'anello se e solo se contiene una unità. La controimmagine di un ideale attraverso un omomorfismo è un ideale (in particolare, il nucleo di un omomorfismo è un ideale); l'immagine di un ideale attraverso un omomorfismo suriettivo è un ideale. L'intersezione di ideali è un ideale; ideale somma e ideale prodotto di due ideali; ideali coprimi. Ideale generato da un sottoinsieme in un anello commutativo e ideali principali; l'immagine attraverso un omomorfismo suriettivo di anelli commutativi di un ideale generato da un sottoinsieme è generata dall'immagine del sottoinsieme. Un anello commutativo  $A$  con  $1 \neq 0$  è un campo se e solo se ha solo gli ideali banali  $\{0\}$  e  $A$ .

Anello quoziente di un anello per un ideale; se  $I$  è un ideale di  $A$ , la proiezione naturale da  $A$  a  $A/I$  è un omomorfismo suriettivo con nucleo  $I$ . Corrispondenza

biunivoca tra gli ideali di un anello  $A$  che contengono un ideale  $I$  e gli ideali di  $A/I$ . Teorema di omomorfismo per anelli; dato  $I$  ideale di  $A$ , gli omomorfismi da  $A/I$  a un altro anello  $B$  sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi da  $A$  a  $B$  il cui nucleo contiene  $I$ . Primo teorema di isomorfismo per anelli; se  $I$  è un ideale di  $A$ , gli anelli  $(A/I)[X]$  e  $A[X]/I[X]$  sono isomorfi. Secondo e terzo teorema di isomorfismo per anelli. Teorema cinese del resto per anelli commutativi; formula per  $\varphi(n)$  in termini della fattorizzazione di  $n$ .

Divisibilità tra elementi di un anello commutativo; divisione con resto tra polinomi a coefficienti in un anello commutativo. Se  $A$  è un sottoanello di un anello commutativo  $B$  e  $b \in B$ , la funzione  $A[X] \rightarrow B$ ,  $f \mapsto f(b)$  è un omomorfismo di anelli con immagine il sottoanello  $A[b]$  di  $B$ . Radici (o zeri) di polinomi;  $a \in A$  è radice di  $f \in A[X]$  se e solo se  $X - a$  divide  $f$ , quindi  $A[X]/(X - a) \cong A$ ;  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ ; se  $A$  è un dominio e  $a_1, \dots, a_n$  sono radici distinte di  $f \in A[X]$ , allora  $\prod_{i=1}^n (X - a_i)$  divide  $f$  (quindi  $\deg(f) \geq n$  se  $f \neq 0$ ). Principio di identità dei polinomi: due polinomi a coefficienti in un dominio infinito  $A$  sono uguali se e solo se definiscono funzioni uguali da  $A$  in  $A$ . Derivata di un polinomio a coefficienti in un anello commutativo e sue proprietà; molteplicità di una radice; una radice di un polinomio è multipla se e solo se è radice anche della derivata.

Domini euclidei e domini a ideali principali; ogni dominio euclideo è a ideali principali;  $\mathbb{Z}$ ,  $K$  e  $K[X]$  (con  $K$  campo) sono domini euclidei; se  $A$  è un dominio ma non un campo e  $a \in A$  è un elemento non nullo e non invertibile, l'ideale  $(a, X)$  non è principale in  $A[X]$ .

Ideali primi e ideali massimali in un anello commutativo; un ideale  $I$  di  $A$  è primo (rispettivamente massimale) se e solo se  $A/I$  è un dominio (rispettivamente un campo), quindi ogni ideale massimale è primo (ma non viceversa); ideali primi e massimali di  $\mathbb{Z}$ . Ogni anello commutativo con  $1 \neq 0$  ha almeno un ideale massimale; ogni ideale proprio di un anello commutativo è contenuto in un ideale massimale.

Elementi associati in un anello commutativo; due elementi associati generano lo stesso ideale, e il viceversa è vero in un dominio. Massimo comun divisore di due elementi in un anello commutativo. Se esiste,  $\text{mcd}(a, b)$  genera il più piccolo ideale principale contenente l'ideale  $(a, b)$ ; in particolare, in un dominio a ideali principali  $\text{mcd}(a, b)$  esiste e genera l'ideale  $(a, b)$ ; in un dominio euclideo  $\text{mcd}(a, b)$  si può calcolare con l'algoritmo di Euclide. Elementi irriducibili in un dominio; un elemento  $a \neq 0$  è irriducibile se  $(a)$  è primo; se inoltre il dominio è a ideali principali,  $a$  è irriducibile se e solo se  $(a)$  è primo se e solo se  $(a)$  è massimale. Se  $K$  è un campo,  $f \in K[X]$  è irriducibile se e solo se  $\deg(f) > 0$  e non esiste  $g \in K[X]$  che divide  $f$  con  $0 < \deg(g) \leq \frac{1}{2} \deg(f)$  (in particolare, se  $\deg(f) = 1$  allora  $f$  è irriducibile; se  $f$  è irriducibile e  $\deg(f) > 1$  allora  $f$  non ha radici; se  $f$  non ha radici e  $\deg(f) = 2$  o  $\deg(f) = 3$  allora  $f$  è irriducibile).

Domini a fattorizzazione unica; esistenza di  $\text{mcd}(a, b)$  in un dominio a fatto-

rizzazione unica e sua espressione in termini delle fattorizzazioni di  $a$  e di  $b$ . Un dominio è a fattorizzazione unica se e solo se ogni successione crescente di ideali principali è stazionaria e ogni elemento irriducibile genera un ideale primo. Ogni dominio a ideali principali è a fattorizzazione unica. Contenuto di un polinomio a coefficienti in un dominio a fattorizzazione unica e polinomi primitivi; il prodotto di polinomi primitivi è primitivo. Se  $A$  è un dominio a fattorizzazione unica, gli elementi irriducibili di  $A[X]$  sono i polinomi costanti che sono irriducibili in  $A$  e i polinomi primitivi che sono irriducibili in  $K[X]$  (con  $K$  campo dei quozienti di  $A$ ). Se  $A$  è un dominio a fattorizzazione unica, anche  $A[X]$  lo è (ma non è un dominio a ideali principali se  $A$  non è un campo).

Campi algebricamente chiusi; un campo è algebricamente chiuso se e solo se gli unici polinomi irriducibili sono quelli di primo grado; teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato); fattorizzazione in  $\mathbb{R}[X]$ . Criterio della radice razionale per cercare le radici di un polinomio a coefficienti in un dominio a fattorizzazione unica. Un polinomio primitivo in  $\mathbb{Z}[X]$  è irriducibile se esiste un numero primo  $p$  che non divide il coefficiente del termine di grado massimo e tale che il polinomio ridotto modulo  $p$  è irriducibile in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ . Criterio di Eisenstein.