Programma di Algebra Superiore

A. A. 2023/2024

Docente: Alberto Canonaco

Richiami di teoria degli anelli (con unità, non necessariamente commutativi). Un anello non nullo in cui ogni elemento non nullo è invertibile a sinistra è un anello con divisione. Anello opposto A^{op} di un anello A; gli ideali destri di A sono gli ideali sinistri di A^{op}.

Moduli (sinistri) su un anello; dare una struttura di A-modulo su un gruppo abeliano M equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}(M)$. Se K è un campo, un K-modulo è un K-spazio vettoriale; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-modulo. Moduli destri su un anello; gli A-moduli destri possono essere identificati con gli A^{op}-moduli sinistri.

Sottomoduli; gli A-sottomoduli di A sono gli ideali sinistri di A. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale sinistro per un sottomodulo sono sottomoduli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Moduli semplici; A è un A-modulo semplice se e solo se A è un anello con divisione.

Omomorfismi e isomorfismi di moduli. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo sono sottomoduli). Gli omomorfismi tra due A-moduli M e N formano un gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_A(M,N)$; la composizione di omomorfismi è bilineare.

Quoziente M/M' di un modulo M per un sottomodulo M'; la proiezione naturale $M \to M/M'$ è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo M'; i sottomoduli di M/M' sono tutti e soli della forma M''/M' con M'' sottomodulo di M contenente M'. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Un A-modulo è ciclico (rispettivamente semplice) se e solo se è isomorfo a A/I per qualche ideale sinistro (rispettivamente ideale sinistro massimale) I di A. Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo.

Prodotto e somma diretta (o coprodotto) di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Insiemi linearmente indipendenti e basi di un modulo; moduli liberi. Un omomorfismo da un modulo libero è univocamente determinato dalle immagini degli elementi di una base, che possono essere scelte arbitrariamente. Ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n per qualche $n \in \mathbb{N}$. Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a una somma diretta di copie di A. Tutti gli A-moduli sono liberi se e solo se A è un anello con divisione (solo enunciato). Tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità (detta rango del modulo) se esiste un omomorfismo da A verso un anello con divisione (solo enunciato).

Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Algebre su un anello commutativo e omomorfismi di algebre; ogni anello ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-algebra e gli omomorfismi di $\mathbb{Z}$-algebre sono gli omomorfismi di anelli.

Addendi diretti di un modulo e moduli indecomponibili; un sottomodulo M' di un modulo M è un addendo diretto se e solo se l'inclusione $M' \to M$ è invertibile a sinistra se e solo se la proiezione al quoziente $M \to M/M'$ è invertibile a destra; se M/M' è libero, allora M' è un addendo diretto di M. Moduli semisemplici; un modulo è semisemplice se e solo se è somma (diretta) di sottomoduli semplici (solo enunciato). Anelli semisemplici; A è semisemplice se e solo se tutti gli A-moduli sono semisemplici; teorema di Wedderburn-Artin (solo enunciato). Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali (solo enunciato).

Complessi e successioni esatte di moduli; moduli finitamente presentati e moduli coerenti; lemma del serpente. Moduli noetheriani e moduli artiniani; data una successione esatta corta di moduli, il termine centrale è noetheriano/artiniano se e solo se lo sono gli altri due termini. Serie di composizione di un modulo; un modulo ha una serie di composizione se e solo se è noetheriano e artiniano. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Anelli noetheriani e anelli artiniani (a sinistra). Se A è noetheriano, un A-modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato se e solo se è finitamente presentato se e solo se è coerente. Se A è artiniano, è anche noetheriano e un A-modulo è artiniano se e solo se è noetheriano (solo enunciato). Teorema della base di Hilbert (solo enunciato). Proprietà dei moduli finitamente presentati rispetto alle successioni esatte corte; su un anello non noetheriano esistono moduli finitamente generati ma non finitamente presentati. Anelli coerenti; ogni anello noetheriano è coerente, ma non viceversa. Proprietà dei moduli coerenti rispetto alle successioni esatte corte; nucleo e conucleo di un omomorfismo tra moduli coerenti sono coerenti; tutti gli A-moduli finitamente presentati sono coerenti se e solo se A è coerente.

Categorie e categorie piccole (in cui gli oggetti formano un insieme); categorie concrete, come Set degli insiemi, Top degli spazi topologici, Grp dei gruppi, Rng degli anelli, A-Mod/Mod-A degli A-moduli sinistri/destri (con A anello) e A-Alg delle A-algebre (con A anello commutativo); preordini come categorie con al più un morfismo tra due oggetti; monoidi come categorie con un solo oggetto. Sottocategorie e sottocategorie piene; Ab/CRng sottocategoria piena di Grp/Rng costituita dai gruppi/anelli commutativi. Congruenze su una categoria e quoziente di una categoria per una congruenza. Prodotto di due categorie. Categoria opposta C^{op} di una categoria C. Morfismi invertibili a sinistra o a destra e isomorfismi; un morfismo è un isomorfismo se e solo se è invertibile a sinistra e a destra. Mono(morfismi) e epi(morfismi); ogni morfismo invertibile a sinistra/destra è un mono/epi; in A-Mod e in Mod-A un morfismo è un mono/epi se e solo se è iniettivo/suriettivo.

Funtori (covarianti) tra categorie; ogni funtore preserva i morfismi invertibili a sinistra o a destra e gli isomorfismi. Funtori controvarianti $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ come funtori (covarianti) $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}$; funtore opposto $\mathrm{F}^{\mathrm{op}} \colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}^{\mathrm{op}}$ di un funtore $\mathrm{F} \colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$. Funtori dimenticanti tra categorie concrete; i funtori tra due monoidi sono gli omomorfismi di monoidi; per ogni oggetto X di una categoria C ci sono funtori $\mathsf{C}(X,-) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,-) \colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ e $\mathsf{C}(-,X) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-,X) \colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$. Funtore identità di una categoria e composizione di funtori; categoria Cat delle categorie (piccole). Funtori fedeli, pieni e pienamente fedeli; isomorfismi di categorie; un funtore è un isomorfismo se e solo se è biunivoco sugli oggetti e pienamente fedele; ci sono isomorfismi di categorie $\mathsf{Mod}\text{-}A \cong A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathsf{Mod}$, $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod} \cong \mathsf{Ab}$, $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Alg} \cong \mathsf{Rng}$. Funtori essenzialmente iniettivi e essenzialmente suriettivi; ogni funtore pienamente fedele è essenzialmente iniettivo.

Trasformazioni naturali tra funtori. Identità di un funtore e composizione verticale di trasformazioni naturali; categoria $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})$ dei funtori tra due categorie C e D (con C piccola); isomorfismi di funtori; per un funtore le proprietà di essere fedele, pieno, essenzialmente iniettivo e essenzialmente suriettivo sono invarianti per isomorfismo. Composizione orizzontale di trasformazioni naturali; l'isomorfismo di funtori è una congruenza su Cat. Equivalenze di categorie; un funtore è un'equivalenza se e solo se è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

Categorie preadditive; A-Mod è preadditiva; anelli come categorie preadditive con un solo oggetto; se A è preadditiva, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A; ideali in una categoria preadditiva e quozienti per ideali. Funtori additivi tra categorie preadditive; i funtori additivi tra anelli sono gli omomorfismi di anelli; per ogni oggetto X di una categoria preadditiva A i funtori $\mathsf{A}(X,-) \colon \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ e $\mathsf{A}(-,X) \colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ sono additivi. $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ è preadditiva se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche la sottocategoria piena $\mathsf{AddFun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ di $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ con oggetti i funtori additivi è preadditiva; $A\text{-}\mathsf{Mod} \cong \mathsf{AddFun}(A,\mathsf{Ab})$. Una categoria può avere più di una struttura di categoria preadditiva; se $\mathrm{F} \colon \mathsf{C} \to \mathsf{A}$ è un funtore pienamente fedele con A preadditiva, esiste un'unica struttura preadditiva su C che rende F additivo.

Prodotti e coprodotti in una categoria; oggetti terminali, iniziali e nulli; preservazione di (co)prodotti da parte di un funtore. Biprodotti in una categoria preadditiva; un oggetto è un biprodotto di un insieme finito di oggetti se e solo se ne è un prodotto se e solo se ne è un coprodotto; un funtore additivo tra categorie preadditive $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ preserva i biprodotti, e dunque i (co)prodotti finiti che esistono in A. Categorie additive; A-Mod è additiva; se A è additiva, lo sono anche A^{op}, ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti e ogni quoziente di A per un ideale; $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ è additiva se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\mathsf{AddFun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ è additiva. Un funtore tra categorie additive è additivo se preserva i (co)prodotti finiti; in una categoria additiva la struttura preadditiva è univocamente determinata; una categoria equivalente a una categoria additiva è additiva.

Limiti e colimiti in una categoria; (co)prodotti, (co)equalizzatori e (co)prodotti fibrati come casi particolari di (co)limiti; unicità a meno di unico isomorfismo dei (co)limiti e loro naturalità. Una categoria ha tutti i (co)limiti (finiti) se ha tutti i (co)prodotti (finiti) e tutti i (co)equalizzatori. Preservazione di (co)limiti da parte di un funtore; se C ha tutti i (co)limiti (finiti), un funtore $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ li preserva se e solo se preserva tutti i (co)prodotti (finiti) e tutti i (co)equalizzatori. Se esistono tutti i (co)limiti dei funtori $\mathsf{L} \to \mathsf{D}$, allora esistono tutti i (co)limiti dei funtori $\mathsf{L} \to \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ per ogni categoria C, e si calcolano puntualmente. Per ogni $X \in \mathsf{C}$ i funtori $\mathsf{C}(X, -)\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ e $\mathsf{C}(-, X)\colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ preservano i limiti.

Nucleo e conucleo di un morfismo in una categoria preadditiva; categorie preabeliane; una categoria preabeliana ha tutti i limiti e i colimiti finiti; A-Mod è preabeliana; se A è preabeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei; $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{A})$ è preabeliana se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\mathsf{AddFun}(\mathsf{C}, \mathsf{A})$ è preabeliana.

In una categoria preadditiva ogni nucleo/conucleo è un mono/epi; in una categoria additiva un morfismo è un mono/epi se e solo ha nucleo/conucleo 0; immagine e coimmagine di un morfismo in una categoria preabeliana. Categorie abeliane; in una categoria abeliana ogni mono/epi coincide con la propria immagine/coimmagine; A-Mod è abeliana; se A è abeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei; $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{A})$ è abeliana se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\mathsf{AddFun}(\mathsf{C}, \mathsf{A})$ è abeliana. In una categoria abeliana un morfismo è un isomorfismo se e solo se è un mono e un epi. Per ogni morfismo f in una categoria preabeliana A c'è un morfismo naturale $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$; tale morfismo è un isomorfismo per ogni f in A se e solo A è abeliana. Ogni morfismo in una categoria abeliana è in modo essenzialmente unico composizione di un epi e di un mono.

Complessi in una categoria preadditiva e successioni esatte in una categoria abeliana; successioni esatte corte e loro spezzamento; ogni funtore additivo tra categorie abeliane preserva le successioni esatte corte che si spezzano; tutte le successioni esatte corte in A-Mod si spezzano se e solo se A è semisemplice. Funtori esatti a sinistra e/o a destra tra categorie abeliane; condizioni equivalenti all'esattezza a sinistra e/o a destra; funtori esatti al centro. Per ogni oggetto X di una categoria abeliana A i funtori $\mathsf{A}(X, -)\colon \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ e $\mathsf{A}(-, X)\colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ sono esatti a sinistra. Una successione è esatta se lo è la sua immagine attraverso un funtore esatto e fedele; teorema di Freyd-Mitchell (solo enunciato); lemma del serpente e lemma dei cinque in una categoria abeliana. Categoria $\mathrm{C}(\mathsf{A})$ dei complessi (coomologici) di una categoria preadditiva A; se A è (pre)additiva o (pre)abeliana, anche $\mathrm{C}(\mathsf{A})$ lo è. Se A è abeliana, ci sono funtori additivi (di coomologia) $\mathrm{H}^i\colon \mathrm{C}(\mathsf{A}) \to \mathsf{A}$

per ogni intero i; successione esatta lunga di coomologia indotta da una successione esatta corta in $\mathsf{C}(\mathsf{A})$.

Funtori aggiunti; unità e counità di un'aggiunzione; un'equivalenza è aggiunto sinistro e destro di un suo quasi-inverso. Un funtore aggiunto di un funtore additivo tra categorie preadditive è additivo; un funtore aggiunto sinistro/destro preserva i colimiti/limiti (in particolare è esatto a destra/sinistra se le categorie sono abeliane), quindi un'equivalenza preserva i limiti e i colimiti; una categoria equivalente a una categoria (pre)abeliana è (pre)abeliana.

(A,B)-bimoduli; gli (A,B)-bimoduli possono essere identificati con i $(B^{\mathrm{op}},A^{\mathrm{op}})$-bimoduli; A è un (A,A)-bimodulo (o A-bimodulo); se A è commutativo e B è una A-algebra, allora ogni B-modulo sinistro/destro è un $(B,A)/(A,B)$-bimodulo (in particolare ogni A-modulo è un A-bimodulo). Se M è un (A,B)-bimodulo e N un (A,C)-bimodulo, allora $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un (B,C)-bimodulo; se A è commutativo, B è una A-algebra e M e N sono B-moduli, allora $\mathrm{Hom}_B(M,N)$ è un A-(bi)modulo (in particolare $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un A-modulo se M e N sono A-moduli). Il funtore $\mathrm{Hom}_A(A,-)\colon A\text{-}\mathsf{Mod}\to A\text{-}\mathsf{Mod}$ è isomorfo a $\mathrm{id}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}$.

Prodotto tensoriale $M\otimes_A N$ di $M\in\mathsf{Mod}\text{-}A$ e $N\in A\text{-}\mathsf{Mod}$ (definito attraverso una proprietà universale di funzioni A-bilanciate da $M\times N$ a un gruppo abeliano); esistenza e unicità a meno di unico isomorfismo del prodotto tensoriale; $M\otimes_A N\cong N\otimes_{A^{\mathrm{op}}} M$; funtorialità del prodotto tensoriale in entrambi gli argomenti. Se M è un (B,A)-bimodulo e N un (A,C)-bimodulo, allora $M\otimes_A N$ è un (B,C)-bimodulo; se A è commutativo e M e N sono A-moduli, allora $M\otimes_A N$ è un A-modulo e può essere equivalentemente definito attraverso una proprietà universale di funzioni A-bilineari da $M\times N$ a un A-modulo. Un (B,A)-bimodulo M definisce un funtore $M\otimes_A -\colon A\text{-}\mathsf{Mod}\to B\text{-}\mathsf{Mod}$, che è aggiunto sinistro di $\mathrm{Hom}_B(M,-)$; il prodotto tensoriale è esatto a destra e preserva le somme dirette in entrambi gli argomenti; il funtore $A\otimes_A -\colon A\text{-}\mathsf{Mod}\to A\text{-}\mathsf{Mod}$ è isomorfo a $\mathrm{id}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}$; associatività a meno di isomorfismo del prodotto tensoriale. Il funtore di restrizione degli scalari $f^*\colon B\text{-}\mathsf{Mod}\to A\text{-}\mathsf{Mod}$ indotto da un omomorfismo di anelli $f\colon A\to B$ ha aggiunto sinistro $f_! := B\otimes_A -$ (estensione degli scalari, vedendo B come (B,A)-bimodulo) e aggiunto destro $f_* := \mathrm{Hom}_A(B,-)$ (coestensione degli scalari, vedendo B come (A,B)-bimodulo); se I è un ideale di A e $\pi\colon A\to A/I$ è la proiezione al quoziente, c'è un isomorfismo naturale $\pi_!(M)\cong M/IM$ per ogni A-modulo M.

Oggetti proiettivi e oggetti iniettivi in una categoria abeliana; tutti gli oggetti sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti sono iniettivi se e solo se tutte le successioni esatte corte si spezzano. Un coprodotto/prodotto è proiettivo/iniettivo se e solo se lo è ogni termine. I moduli proiettivi sono gli addendi diretti dei moduli liberi. Moduli piatti; una somma diretta di moduli è piatta se e solo se lo è ogni termine; ogni modulo proiettivo è piatto. Su un dominio a ideali principali un sottomodulo di un modulo libero è libero, quindi un modulo è proiettivo se e solo se è libero. Su un dominio un modulo piatto è senza torsione, e il viceversa sa vale su un dominio a ideali principali. Un A-modulo M è iniettivo se e solo se ogni omomorfismo $I \to M$ (con I ideale sinistro di A) può essere esteso a un omomorfismo $A \to M$. Su un dominio un modulo iniettivo è divisibile e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Categorie abeliane con abbastanza proiettivi/iniettivi; A-Mod ha abbastanza proiettivi e abbastanza iniettivi. Risoluzioni proiettive/iniettive di un oggetto in una categoria abeliana; ogni oggetto ha risoluzioni proiettive/iniettive se la categoria ha abbastanza proiettivi/iniettivi.

Omotopia tra morfismi in $\mathrm{C}(\mathsf{A})$ (con A categoria preadditiva); i morfismi omotopi a 0 formano un ideale in $\mathrm{C}(\mathsf{A})$, e il corrispondente quoziente costituisce la categoria omotopa $\mathrm{K}(\mathsf{A})$; se A è additiva, anche $\mathrm{K}(\mathsf{A})$ lo è (ma in generale $\mathrm{K}(\mathsf{A})$ non è preabeliana se A è abeliana); i funtori $\mathrm{H}^i\colon \mathrm{C}(\mathsf{A}) \to \mathsf{A}$ inducono funtori additivi $\mathrm{H}^i\colon \mathrm{K}(\mathsf{A}) \to \mathsf{A}$. Se A è abeliana con abbastanza iniettivi, la scelta di una risoluzione iniettiva di ogni oggetto di A si estende in modo unico a un funtore additivo $\mathrm{I}\colon \mathsf{A} \to \mathrm{K}(\mathsf{A})$, e scelte diverse inducono funtori isomorfi.

Un funtore additivo tra categorie preadditive $\mathrm{F}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ induce funtori additivi $\mathrm{F}\colon \mathrm{C}(\mathsf{A}) \to \mathrm{C}(\mathsf{B})$ e $\mathrm{F}\colon \mathrm{K}(\mathsf{A}) \to \mathrm{K}(\mathsf{B})$. Se A e B sono abeliane e A ha abbastanza iniettivi, l'i-esimo funtore derivato destro $\mathrm{R}^i\mathrm{F}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ di F è il funtore additivo (ben definito a meno di isomorfismo) ottenuto come composizione $\mathsf{A} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathsf{A}) \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{K}(\mathsf{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^i} \mathsf{B}$. Successione esatta lunga dei funtori derivati indotta da una successione esatta corta in A; naturalità dei morfismi $\mathrm{R}^i \to \mathrm{R}^{i+1}$ nella successione esatta lunga rispetto al funtore e alle successioni esatte corte (solo enunciato); F è esatto a sinistra se e solo se $\mathrm{R}^0\mathrm{F} \cong \mathrm{F}$; F è esatto se e solo se $\mathrm{R}^0\mathrm{F} \cong \mathrm{F}$ e $\mathrm{R}^i\mathrm{F} \cong 0$ per $i > 0$ (basta $i = 1$). Funtori derivati sinistri (se A ha abbastanza proiettivi) $\mathrm{L}_i\mathrm{F} := (\mathrm{R}^i\mathrm{F}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

$\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(-,=)\colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ come funtori derivati destri di $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(-,=)$ calcolati nel primo (se A ha abbastanza proiettivi) o nel secondo (se A ha abbastanza iniettivi) argomento; in entrambi i casi una successione esatta corta in ciascun argomento induce una successione esatta lunga degli $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}$; equivalenza delle due definizioni quando A ha sia abbastanza iniettivi che abbastanza proiettivi. $\mathrm{Tor}^A_i(-,=)\colon \mathsf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ come funtori derivati sinistri di $-\otimes_A =$ calcolati equivalentemente nel primo o nel secondo argomento. Calcolo di Ext^i_A e Tor^A_i quando A è un dominio a ideali principali.

Cenni su: dimensione iniettiva/proiettiva di un oggetto in una categoria abeliana con abbastanza iniettivi/proiettivi e dimensione globale della categoria; identificazione di $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(X,Y)$ con classi di equivalenza di estensioni di X con Y di lunghezza i (cioè di successioni esatte della forma $0 \to Y \to Z_1 \to \cdots \to Z_i \to X \to 0$); oggetti F-aciclici (rispetto a un funtore additivo $\mathrm{F}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ tra categorie abeliane) e possibilità di definire i funtori derivati di F attraverso risoluzioni F-acicliche anche quando A non ha abbastanza iniettivi o proiettivi.

Categoria $\mathsf{PSh}(X,\mathsf{C})$ dei prefasci su uno spazio topologico a valori in una categoria concreta C; prefasci separati e fasci; sottocategoria piena $\mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})$ di $\mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$ con oggetti i fasci; fascio costante $S_X \in \mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})$ di valore $S \in \mathsf{C}$. Spazi anellati (commutativi); categoria abeliana $\mathcal{O}_X$-PMod dei prefasci di moduli su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ e sua sottocategoria piena $\mathcal{O}_X$-Mod dei fasci di moduli; $\mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \cong \mathcal{O}_X(X)$-$\mathsf{Mod}$ se $X \neq \emptyset$ ha la topologia banale; A_X-$\mathsf{Mod} \cong \mathsf{Sh}(X, A\text{-}\mathsf{Mod})$ per ogni anello (commutativo) A. Morfismi (localmente) iniettivi e (localmente) suriettivi di prefasci; un morfismo iniettivo/suriettivo lo è anche localmente; un morfismo localmente iniettivo di prefasci separati è iniettivo; in generale un morfismo localmente suriettivo di fasci non è suriettivo. Per ogni prefascio $\mathcal{F}$ esiste unico a meno di isomorfismo un morfismo localmente biunivoco $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{a}}$ con $\mathcal{F}^{\mathrm{a}}$ fascio (detto associato a $\mathcal{F}$), e da questo si ottiene un funtore "fascio associato" $\mathsf{PSh}(X, \mathsf{C}) \to \mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})$ (rispettivamente $\mathcal{O}_X$-$\mathsf{PMod} \to \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod}$) aggiunto sinistro dell'inclusione $\mathsf{Sh}(X, \mathsf{C}) \to \mathsf{PSh}(X, \mathsf{C})$ (rispettivamente $\mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X$-$\mathsf{PMod}$). Per ogni spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ la categoria $\mathcal{O}_X$-Mod è abeliana con nuclei quelli di $\mathcal{O}_X$-PMod, conuclei ottenuti da quelli di $\mathcal{O}_X$-PMod prendendo il fascio associato, mono i morfismi (localmente) iniettivi e epi i morfismi localmente suriettivi.

Insiemi filtranti e colimiti filtranti; calcolo dei colimiti filtranti in categorie concrete. Spiga di un prefeascio in un punto; un morfismo di prefasci è localmente iniettivo/suriettivo se e solo se è iniettivo/suriettivo sulle spighe (quindi $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{F}^{\mathrm{a}}_x$ per ogni $x \in X$ e per ogni prefascio $\mathcal{F}$ su X); una successione di fasci è esatta se e solo se lo è sulle spighe. $\mathcal{O}_X$-Mod ha abbastanza iniettivi per ogni spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$. Il funtore $\Gamma(X, -)\colon \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X(X)$-$\mathsf{Mod}$ che manda un fascio $\mathcal{F}$ nelle sezioni globali $\mathcal{F}(X)$ è esatto a sinistra (ma in generale non a destra); coomologia dei fasci $H^i(X, -) := \mathrm{R}^i\Gamma(X, -)$.

Cenni su: relazioni tra la coomologia dei fasci e altre teorie coomologiche; funtori $\mathcal{H}om_X(-, =)\colon \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod}$ (esatto a sinistra in entrambi gli argomenti) e $- \otimes_X = \colon \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \times \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod}$ (esatto a destra in entrambi gli argomenti) e loro funtori derivati; una funzione continua $f\colon X \to Y$ induce un funtore $f_*\colon \mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})\colon \mathsf{Sh}(Y, \mathsf{C})$ con aggiunto sinistro esatto $f^{-1}\colon \mathsf{Sh}(Y, \mathsf{C})\colon \mathsf{Sh}(X, \mathsf{C})$; morfismi di spazi anellati; un morfismo di spazi anellati $f\colon X \to Y$ induce un funtore $f_*\colon \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_Y$-$\mathsf{Mod}$ con aggiunto sinsitro $f^*\colon \mathcal{O}_Y$-$\mathsf{Mod} \to \mathcal{O}_X$-$\mathsf{Mod}$; spazi anellati locali e loro morfismi; lo spettro di un anello commutativo può essere dotato di un fascio di anelli, e in questo modo si ottiene un funtore pienamente fedele da $\mathsf{CRng}^{\mathrm{op}}$ alla categoria degli spazi anellati locali; schemi affini e schemi.