

Corso di Algebra - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 6.2.2006

1. Quanti sono gli omomorfismi di gruppo da $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ a S_3 e quanti quelli da S_3 a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

2. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Dimostrare che

$$Z_G(H) = \{g \in G : gh = hg \ \forall h \in H\}$$

è un sottogruppo di G . Mostrare inoltre che $Z_G(H)$ è normale in G se H è normale in G .

3. Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Indicando con $\mathcal{I}(A)$ e $\mathcal{I}(B)$ l'insieme degli ideali rispettivamente di A e di B , sia $\varphi : \mathcal{I}(B) \rightarrow \mathcal{I}(A)$ la funzione definita da $\varphi(I) = f^{-1}(I)$. Dimostrare che:

(a) se f è suriettiva, allora φ è iniettiva;

(b) se φ è suriettiva, allora f è iniettiva.

4. Mostrare che il polinomio $P(X) = X^4 + 3X^3 - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.

5. Sia K un campo e f un polinomio a coefficienti in K . Supponendo che il grado del campo di spezzamento di f su K sia 4, dimostrare che $\deg(f) \geq 4$. Mostrare inoltre che $\deg(f) = 4$ se f è irriducibile.

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente.