Corso di Algebra - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 26.9.2006

1. Sia G un gruppo finito di ordine p^n, dove p è un numero primo. Mostrare che l'ordine di ogni elemento di G è una potenza di p. Mostrare che, se $n > 0$, G contiene elementi di ordine p.
2. Dimostrare che il gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è ciclico.
3. Siano A un anello commutativo. Se I è un ideale di A poniamo

$$r(I) = \{a \in A : \text{esiste } n \geq 1 \text{ tale che } a^n \in I\}$$

   (a) Mostrare che $r(I)$ è un ideale di A contenente I, e che $r(I) = A$ se e solo se $I = A$.

   (b) Dare un esempio di ideale I che sia diverso da $r(I)$.

4. Siano A e B anelli commutativi e sia $\alpha : A \to B$ un omomorfismo.

   (a) Si mostri che, se I è un ideale primo di B, allora $\alpha^{-1}(I)$ è un ideale primo di A e che inoltre, se I è un ideale proprio, anche $\alpha^{-1}(I)$ è proprio.

   (b) Si consideri il caso particolare in cui $A = \mathbb{R}[X]$ e $B = \mathbb{C}[X]$, dove X è una indeterminata, e α è l'inclusione naturale. Dire, per ogni ideale primo I in A, quali e quanti sono gli ideali primi J di B tali che $\alpha^{-1}(J) = I$.

5. Sia K il campo con 7 elementi, e sia $P(X) = X^3 - 2 \in K[X]$. Indichiamo con I l'ideale in $K[X]$ generato da P, e poniamo $F = K[X]/I$. Si mostri che F è un campo e si calcoli il numero dei suoi elementi.

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente.