**Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004**

*Prova scritta del 18.2.2004*

Compito **A**

1. Sia $Oxyz$ un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano $P_1$ il punto di coordinate $(2, 10, -1)$.

   (a) Trovare la distanza tra $P_1$ ed il punto $P_2$ di intersezione tra la retta $r$ e il piano $\pi$ di equazioni rispettivamente
   $$\begin{cases} 3x - y - 4z + 6 = 0 \\ y - z - x - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad 2x - y + z - 3 = 0.$$

   (b) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per $P_1$ e $P_2$ e parallelo alla retta $s$ di equazioni
   $$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ 2z = 2y - 14 \end{cases} .$$

   (c) Scrivere l'equazione della sfera di centro $P_1$ e tangente a $s$.

   **Punti (3+4+4)**

2. Siano $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, -1, 0)$ e $v_4 = (0, 1, 0, -1)$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che $f(v_1) = (-1+2b, -1, -1-b, 0)$, $f(v_2) = (0, -2, -1, 1)$, $f(v_3) = (0, 2, 3, 0)$ e $f(v_4) = (0, b-2, b, 2)$.

   (a) Scrivere la matrice di $f$ nella base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

   (b) Calcolare $\dim(\ker f)$ e $\dim(\operatorname{Im} f)$ al variare di $b \in \mathbb{C}$.

   (c) Per quali valori di $b$ il vettore che nella base $\mathcal{V}$ ha coordinate $(1, 3, -1, 3)$ non appartiene ad $\operatorname{Im} f$?

   (d) Calcolare gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi per $b = 0$.

   (e) $f$ è diagonalizzabile quando $b = 0$?

   **Punti (3+2+2+4+2)**

3. Sia $A$ una matrice complessa quadrata, e sia $n$ un intero maggiore di 1.

   VERO O FALSO:

   (a) se $A^n = I$, ogni autovalore di $A$ è una radice $n$-esima di 1;

   (b) se ogni autovalore di $A$ è una radice $n$-esima di 1 diversa da 1, allora $A^n = I$;

   (c) se $A^n$ è diagonalizzabile, allora anche $A$ è diagonalizzabile.

   **Punti (1+2+3)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004**
*Prova scritta del 18.2.2004*

Compito **B**

1. Sia $Oxyz$ un fissato sistema di riferimento cartesiano ortogonale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano $P_1$ il punto di coordinate $(-1, 5, -10)$.

   (a) Trovare la distanza tra $P_1$ ed il punto $P_2$ di intersezione tra la retta $r$ e il piano $\pi$ di equazioni rispettivamente
   $$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 4y - 5x + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad 2x - y - z - 4 = 0.$$

   (b) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano passante per $P_1$ e $P_2$ e parallelo alla retta $s$ di equazioni
   $$\begin{cases} 4z - 2x = -28 \\ x - 2z + y = 17 \end{cases} .$$

   (c) Scrivere l'equazione della sfera di centro $P_1$ e tangente a $s$.

   **Punti (3+4+4)**

2. Siano $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, -1, 0)$ e $v_4 = (0, 1, 0, -1)$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che $f(v_1) = (4, 2, 1, 0)$, $f(v_2) = (0, -1 + 2b, -1, -2b)$, $f(v_3) = (4 + b, b, -2 + b, 0)$ e $f(v_4) = (0, 1, -1, -2)$.

   (a) Scrivere la matrice di $f$ nella base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

   (b) Calcolare $\dim(\ker f)$ e $\dim(\operatorname{Im} f)$ al variare di $b \in \mathbb{C}$.

   (c) Per quali valori di $b$ il vettore che nella base $\mathcal{V}$ ha coordinate $(5, 2, 1, -4)$ non appartiene ad $\operatorname{Im} f$?

   (d) Calcolare gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi per $b = 0$.

   (e) $f$ è diagonalizzabile quando $b = 0$?

   **Punti (3+2+2+4+2)**

3. Sia $B$ una matrice complessa $k \times k$, e sia $n$ un intero maggiore di 1.

   Vero o Falso:

   (a) se $B^n = I$, ogni autovalore di $B$ è una radice $n$-esima di 1;

   (b) se ogni autovalore di $B$ è una radice $n$-esima di 1 diversa da 1, allora $B^n = I$;

   (c) se $B^n$ è diagonalizzabile, allora anche $B$ è diagonalizzabile.

   **Punti (1+2+3)**