

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 19.9.2005

Compito A

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia π il piano di equazione $x + 3y - z = 3$, r la retta passante per il punto P di coordinate $(1, 0, 1)$ e giacitura generata dal vettore $(-2, 1, 1)$ e s la retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x + z = 6 \\ y - z = -1 \end{cases}.$$

- (a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r ed un'equazione parametrica per il piano π ;
(b) controllare se la giacitura di r è contenuta in quella di π e se r è contenuta in π ;
(c) determinare le coordinate del punto Q intersezione di π e s e del punto R di intersezione tra r e s ;
(d) calcolare la distanza di R da π e scrivere un'equazione per la sfera di centro R tangente a π .

Punti (2+3+3+3)

2. Si consideri l'applicazione lineare $F_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+5)x_1 \\ (-4a+5)x_1 + 4ax_2 + ax_3 \\ (2+a-a^2)x_1 + (a^2+3)x_3 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

- (a) Determinare la matrice rappresentativa di F_a rispetto alla base di \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b) Determinare i valori di a per i quali F_a è un isomorfismo.
(c) Determinare i valori di a per i quali F_a è diagonalizzabile.
(d) Calcolare gli autovalori e gli autospazi per $a = -1$.

Punti (3+2+3+3)

3. Sia A una matrice complessa quadrata invertibile, e sia n un intero maggiore di 1.

- (a) Si mostri che, se A è diagonalizzabile, anche A^n è diagonalizzabile.
(b) Si mostri che, se A^n è diagonalizzabile, anche A è diagonalizzabile.
(c) VERO O FALSO: se A è diagonalizzabile i polinomi minimi di A e di A^n hanno lo stesso grado.

Punti (2+4+2)

%%%%%%%%%

Ogni risposta va giustificata. In particolare, risposte ai quesiti dell'esercizio 3 del tipo "vero" o "falso", senza ulteriori spiegazioni, non sono ammissibili.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 19.9.2005

Compito B

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia π il piano di equazione $-x + 3y + 3z = 8$, r la retta passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 0)$ e giacitura generata dal vettore $(3, -1, 2)$ e s la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + 6y = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}.$$

- (a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r ed un'equazione parametrica per il piano π ;
- (b) controllare se la giacitura di r è contenuta in quella di π e se r è contenuta in π ;
- (c) determinare le coordinate del punto Q intersezione di π e s e del punto R di intersezione tra r e s ;
- (d) calcolare la distanza di R da π e scrivere un'equazione per la sfera di centro R tangente a π .

Punti (2+3+3+3)

2. Si consideri l'applicazione lineare $F_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_3 \\ 5a(x_2 - x_1) + ax_3 \\ (6 - a^2)x_1 + (a^2 + a - 6)x_3 \end{pmatrix}$$

dove a è un parametro reale.

- (a) Determinare la matrice rappresentativa di F_a rispetto alla base di \mathbb{R}^3

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b) Determinare i valori di a per i quali F_a è un isomorfismo.
- (c) Determinare i valori di a per i quali F_a è diagonalizzabile.
- (d) Calcolare gli autovalori e gli autospazi per $a = -1$.

Punti (3+2+3+3)

3. Sia A una matrice complessa quadrata invertibile, e sia n un intero maggiore di 1.

- (a) Si mostri che, se A è diagonalizzabile, anche A^n è diagonalizzabile.
- (b) Si mostri che, se A^n è diagonalizzabile, anche A è diagonalizzabile.
- (c) VERO O FALSO: se A è diagonalizzabile i polinomi minimi di A e di A^n hanno lo stesso grado.

Punti (2+4+2)

%%%%%%%%%

Ogni risposta va giustificata. In particolare, risposte ai quesiti dell'esercizio 3 del tipo "vero" o "falso", senza ulteriori spiegazioni, non sono ammissibili.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.