9. Proiettori

Sia V uno spazio vettoriale reale o complesse di dimensione finita, munito di un prodotto scalare (o di un prodotto hermitiano) $\langle \, , \, \rangle$ definito positivo. Sia W un sottospazio vettoriale di V e sia $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$ il suo complemento ortogonale. Indichiamo con p la proiezione ortogonale di V su W, cioè l'applicazione lineare da V in sè definita come segue. Sia v un elemento di V; dato che $V = W \oplus W^\perp$ possiamo scriverlo, in modo unico, sotto la forma $v = w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Allora $p(v) = w$. Notiamo che, se $w_1, \ldots, w_h$ è una base ortonormale di W, allora $p(v) = \sum_{i=1}^h \langle v, w_i\rangle w_i$. In effetti,

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^h \langle v, w_i\rangle w_i \, , \, w_j \right\rangle = \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^h \langle v, w_i\rangle\langle w_i, w_j\rangle = \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^h \langle v, w_i\rangle \delta_{i,j} = 0 \, .$$

Notiamo che $p^2 = p$, cioè che, come si dice, la proiezione p è un operatore *idempotente*. Infatti, se $w \in W$, allora evidentemente $p(w) = w$; dunque, per ogni $v \in V$, $p(p(v)) = p(v)$, dato che $p(v) \in W$. Inoltre p è un operatore autoaggiunto. Infatti, dati vettori v e z in V, scriviamo $v = p(v) + v'$ e $z = p(z) + z'$, dove v' e z' appartengono a $W^\perp$; allora

$$\langle p(v), z\rangle = \langle p(v), p(z) + z'\rangle = \langle p(v), p(z)\rangle = \langle p(v) + v', p(z)\rangle = \langle v, p(z)\rangle \, .$$

Le due proprietà di p appena dimostrate caratterizzano le proiezioni ortogonali. Diremo che una applicazione lineare $f : V \to V$ è un *proiettore* se è autoaggiunta e idempotente. Vale allora il seguente risultato.

Proposizione (9.1). *Sia $f : V \to V$ un proiettore. Allora esiste un sottospazio vettoriale W di V tale che f sia la proiezione ortogonale su W.*

Per la dimostrazione poniamo $W = f(V)$, e notiamo che per ogni $w \in W$ si ha che $f(w) = w$. Infatti si può scrivere $w = f(v)$ per qualche $v \in V$, e dunque $f(w) = f(f(v)) = f(v) = w$. D'altra parte, per ogni $v \in V$ e ogni $w \in W$ si ha che

$$\langle v - f(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle f(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle v, f(w)\rangle = \langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle = 0 \, ,$$

dato che f è autoaggiunta. Questo mostra che $v = f(v) + (v - f(v))$ è la decomposizione di v in somma di un vettore appartenente a W, e cioè $f(v)$, e di uno appartenente a $W^\perp$, cioè $v - f(v)$. Dunque $f(v)$ è la proiezione ortogonale di v su W.