Sistemi lineari: il teorema di Rouché-Capelli

Maurizio Cornalba

16/11/2013

Sia K un campo. Penseremo gli elementi di K^n come matrici colonna con n componenti. Un *sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \dots, x_n$ sul campo K* è un sistema della forma

$$\left\{\begin{aligned} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n &= b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \cdots + a_{m\,n}x_n &= b_m \end{aligned}\right. \tag{1}$$

dove i coefficienti $a_{i\,j}$ e i b_i sono elementi di K. Un tale sistema si può scrivere in forma compatta sotto la forma

$$AX = B \tag{2}$$

dove A, X e B sono le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & & \cdots & a_{2\,n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m\,1} & & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

e il prodotto è il prodotto di matrici. Il sistema si dice *omogeneo* se $B = 0$. In generale il *sistema omogeneo associato a* (2) è il sistema $AX = 0$. La *matrice completa* (o *orlata*) del sistema (2) è la matrice $(A\ B)$ ottenuta giustapponendo la colonna B alle colonne di A.

Teorema 1 (Rouché-Capelli)**.** *Si consideri il sistema (2). Allora:*

i) *il sistema ha soluzioni se e solo se le matrici A e $(A\ B)$ hanno lo stesso rango;*
ii) *l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$ è un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n - \mathrm{rk}(A)$;*
iii) *se $X_0 \in K^n$ è tale che $AX_0 = B$, le soluzioni del sistema sono tutti e soli gli elementi di K^n della forma $X_0 + Y$ dove Y è una soluzione del sistema omogeneo associato.*

Dimostrazione. Se indichiamo con $A_1, \dots, A_n$ le colonne di A, dire che $AS = B$, cioè che

$$B = s_1A_1 + \cdots + s_nA_n$$

per qualche

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$$

equivale a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A, cioè che lo spazio vettoriale generato dalla colonne di A e quello generato dalle colonne di $(A\ B)$ coincidono.

Questo dimostra il punto i). L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è il nucleo dell'applicazione lineare $F : K^n \to K^m$ definita da $F(X) = AX$. Il punto ii) segue allora immediatamente dal fatto che

$$n = \dim(\ker F) + \mathrm{rk}(F) = \dim(\ker F) + \mathrm{rk}(A)$$

Infine notiamo che, se $AY = 0$, allora

$$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + 0 = B$$

e che viceversa, se S è una soluzione del sistema, allora $Y = S - X_0$ verifica $AY = AS - AX_0 = B - B = 0$. Questo dimostra iii). □

Uno dei metodi principali di risoluzione di un sistema (1) è l'*eliminazione gaussiana.* Diremo che due sistemi di m equazioni lineari in n incognite sono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni. L'eliminazione gaussiana punta a trasformare il sistema originario in un altro, equivalente e più facilmente risolubile, tramite una successione di operazioni elementari di tre tipi:

(1) Scambio di due equazioni.
(2) Moltiplicazione di una equazione per uno scalare non nullo.
(3) Sostituzione di una equazione con la somma dell'equazione stessa e di un multiplo di un'altra.

È chiaro che ognuna di queste operazioni non cambia l'insieme delle soluzioni. Inoltre le tre operazioni corrispondono alle tre operazioni elementari per righe sulla matrice completa $(A\ B)$. Sappiamo che tramite operazioni di questo tipo la matrice completa del sistema si può ridurre in forma a scaletta $(A'\ B')$, dove A' è ottenuta tramite operazioni per righe da A. Come si è osservato le soluzioni del sistema originario $AX = B$ coincidono con quelle del sistema $A'X = B'$. D'altra parte si vede facilmente che un sistema la cui matrice completa sia in forma a scaletta è immediatamente risolubile. Piuttosto che dimostrarlo formalmente illustriamo questo fatto con tre esempi di sistemi su $\mathbb{R}$.

Esempio 1. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

La corrispondente matrice completa è

$$(A\ B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Con operazioni elementari per righe (scambio delle prime due righe, sottrazione dalla terza riga di due volte la prima, sottrazione dalla terza riga di tre volte la seconda) la matrice si trasforma successivamente in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e infine in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 \end{pmatrix} = (A' \ B')$$

Sia A' che $(A' \ B')$ hanno rango 3 e quindi lo stesso è vero per le matrici A e $(A \ B)$. Il sistema ha dunque soluzioni; queste coincidono con le soluzioni del sistema $A'X = B'$, che in forma esplicita si scrive

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\quad -6x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

L'ultima di queste equazioni permette di ricavare x_3 in funzione di x_4. Sostituendo questa espressione al posto di di x_3 nella seconda equazione si ricava x_2 in funzione di x_4 e infine, sostituendo le espressioni ottenute per x_2 e x_3 nella prima equazione si ricava anche x_1 in funzione di x_4. Esplicitamente

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3}{2}x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_4 + \frac{2}{3} \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

dove x_4 può essere scelto in modo arbitrario. In definitiva, ponendo $t = x_4/2$, concludiamo che le soluzioni del nostro sistema sono tutti e soli gli elementi di $\mathbb{R}^4$ della forma

$$X_0 + tZ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Si noti che il vettore Z è un generatore dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio 2. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

La corrispondente matrice completa è $(A \ B)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con operazioni elementari per righe la matrice $(A \ B)$ si trasforma in

$$(A' \ B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il rango di A' è 2 e quello di $(A'\ B')$ è 3; quindi il sistema $A'X = B'$ non ha soluzioni. Lo stesso è dunque vero anche per il sistema originario. In effetti in forma esplicita il sistema $A'X = B'$ si scrive

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad 0 = -3 \end{cases}$$

che ovviamente non ha soluzioni. Le soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$ o, che è lo stesso, le soluzioni di $A'X = 0$, costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $3 - \mathrm{rk}(A) = 1$, generato ad esempio da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Esempio 3. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

La corrispondente matrice completa è $(A\ B)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con operazioni elementari per righe la matrice $(A\ B)$ si trasforma in

$$(A'\ B') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di A' è 2, come quello di $(A'\ B')$. Il sistema ha quindi soluzioni, e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione $4 - \mathrm{rk}(A) = 2$. Per trovare esplicitamente le soluzioni dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Possiamo scegliere x_2 e x_4 in modo arbitrario e x_1, x_3 sono a loro legati da $x_3 = -x_4 + \frac{4}{3}$, $x_1 = -x_2 + \frac{1}{3}$. Quindi le soluzioni del nostro sistema sono tutti e soli i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $s, t \in \mathbb{R}$.