Il gruppo alterno su $n \geq 5$ elementi è semplice

Maurizio Cornalba

17 maggio 2010

Sia X un insieme finito e sia n il numero dei suoi elementi. Indichiamo con $S_n = S(X)$ il gruppo simmetrico su X e con $A_n = A(X)$ il gruppo alterno su X, cioè il sottogruppo di $S(X)$ costituito dalle permutazioni pari. Se $\sigma \in S_n$, chiamiamo *lunghezza* di σ e indichiamo con $\ell(\sigma)$ il numero degli $x \in X$ tali che $\sigma(x) \neq x$. Evidentemente, $\ell(\sigma) = 2$ se e solo se σ è una trasposizione, e $\ell(\sigma) = 3$ se e solo se σ è un 3-ciclo.

Lemma 1. *Ogni elemento di A_n è un prodotto di 3-cicli. Ogni elemento di $S_n \smallsetminus A_n$ è un prodotto di 3-cicli e di una trasposizione.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su $\ell(\sigma)$, dove $\sigma \in S_n$. Se $\ell(\sigma) \leq 3$, non c'è niente da dimostrare. Se $\ell(\sigma) > 3$, siano $a, b = \sigma(a)$ e c elementi distinti di X che non sono lasciati fissi da σ, e poniamo

$$\tau = \sigma \cdot (a\ c\ b)$$

Se $\sigma(x) = x$, allora $\tau(x) = x$. Inoltre $\tau(b) = b$. Quindi la lunghezza di τ è strettamente minore di quella di σ. Dato che $\sigma = \tau \cdot (a\ b\ c)$, l'asserto segue per ipotesi induttiva. □

Lemma 2. *Sia H un sottogruppo normale di A_n. Se H contiene un 3-ciclo, allora $H = A_n$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1 basta mostrare che tutti i 3-cicli appartengono a H. Sia $\rho = (a\ b\ c)$ un 3-ciclo appartenente a H, e sia $\tau = (a'\ b'\ c')$ un altro 3-ciclo. Scegliamo una permutazione pari σ tale che $\sigma(a) = a'$ e $\sigma(b) = b'$, $\sigma(c) = c'$, oppure $\sigma(b) = c'$, $\sigma(c) = b'$. Nel primo caso $\sigma\rho\sigma^{-1} = \tau$, e dunque τ appartiene a H, per la normalità di quest'ultimo. Nel secondo caso $\sigma\rho\sigma^{-1} = \tau^{-1}$, e ne segue che τ^{-1}, e quindi anche τ, appartiene a H. □

Lemma 3. *Sia H un sottogruppo normale di A_n. Se $n \geq 5$ e $H \neq \{1\}$, H contiene un 3-ciclo.*

Dimostrazione. Mostreremo che un elemento di H di lunghezza minima tra quelli diversi da 1 è necessariamente un 3-ciclo. Sia σ un elemento di H. Se $\ell(\sigma) \geq 5$, si possono trovare elementi distinti a, b, c, d, e di X tali che $b = \sigma(a)$, $d = \sigma(c)$, $e \neq \sigma(b), \sigma(e)$. Questo è chiaro se $\ell(\sigma) \geq 6$. Se $\ell(\sigma) = 5$, σ deve essere un 5-ciclo $(a\ b\ c\ d\ e)$, e vale la stessa conclusione. Poniamo

$$\tau = (a\ b\ e) \cdot \sigma \cdot (a\ b\ e)^{-1}$$

Dato che H è normale, $\tau \in H$. Inoltre $\sigma^{-1}\tau \neq 1$, perché $\sigma(b) \neq e = \tau(b)$, mentre $\sigma^{-1}\tau(x) = x$ se $x \in X$ è lasciato fisso da σ. Infine $\sigma^{-1}\tau(c) = c$, e quindi $\sigma^{-1}\tau$ è un elemento non banale di H la cui lunghezza è minore di quella di σ. Resta da esaminare il caso in cui $\ell(\sigma) = 4$, e quindi σ è della forma $(a\ b) \cdot (c\ d)$. Se e è un elemento di X diverso da a, b, c, d e τ è definito come sopra, allora

$$\sigma^{-1}\tau = (a\ b) \cdot (c\ d) \cdot (a\ b\ e) \cdot (a\ b) \cdot (c\ d) \cdot (a\ e\ b) = (a\ b) \cdot (a\ b\ e) \cdot (a\ b) \cdot (a\ e\ b) = (a\ e\ b)^2 = (a\ b\ e)$$

□

Corollario 1. *Se $n \geq 5$ il gruppo alterno A_n è semplice.*