La nozione di base in topologia generale

Maurizio Cornalba

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ una topologia su X. Un sottinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ si dice una *base* per la topologia $\mathcal{A}$ (o per lo spazio topologico $(X, \mathcal{A})$) se ogni elemento di $\mathcal{A}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 1. Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di tutti i dischi aperti è una base per la topologia metrica su X, in quanto gli aperti di questa topologia sono tutte e sole le unioni di dischi.

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base per $\mathcal{A}$. Osserviamo che, dato che X è un aperto, è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Osserviamo anche che, dati due elementi B_1 e B_2 di $\mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2$ è aperto e quindi anch'esso unione di elementi di $\mathcal{B}$. Queste due proprietà caratterizzano, tra tutte le famiglie di sottinsiemi di X, quelle che sono basi di qualche topologia. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 2. *Sia X un insieme e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottinsiemi di X tale che:*

i) $\bigcup \mathcal{B} = X$
ii) Se B_1 e B_2 appartengono a $\mathcal{B}$ allora $B_1 \cap B_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Allora esiste una e una sola topologia su X di cui $\mathcal{B}$ sia base. Viceversa, se $\mathcal{B}$ è base di qualche topologia su X, allora $\mathcal{B}$ gode delle proprietà i) e ii).

Si è appena osservato che le basi soddisfano *i)* e *ii)*. Supponiamo viceversa che $\mathcal{B}$ verifichi *i)* e *ii)* e definiamo $\mathcal{A}$ come l'insieme dei sottinsiemi di X che sono unione di elementi di $\mathcal{B}$. Dico che $\mathcal{A}$ è una topologia su X. Notiamo innanzitutto che la proprietà *i)* garantisce che X appartiene ad $\mathcal{A}$. Notiamo poi che l'insieme vuoto appartiene ad $\mathcal{A}$ dato che $\emptyset = \bigcup \emptyset$. Se poi $\{A_i,\ i \in I\}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{A}$ possiamo scrivere $A_i = \bigcup \mathcal{B}_i$, dove $\mathcal{B}_i$ è un sottinsieme di $\mathcal{B}$. Quindi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathcal{B}',$$

dove

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i .$$

Si conclude che anche $\bigcup_{i \in I} A_i$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè che appartiene ad $\mathcal{A}$. Siano ora A_1 e A_2 elementi di $\mathcal{A}$. Scriviamo $A_i = \bigcup \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, dove $\mathcal{B}_i$ è un sottinsieme di $\mathcal{B}$, e notiamo che

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup \{B \cap C : B \in \mathcal{B}_1,\ C \in \mathcal{B}_2\} .$$

D'altra parte *ii)* dice che $B \cap C$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ e ogni $C \in \mathcal{B}$, e quindi in particolare per ogni $B \in \mathcal{B}_1$ e ogni $C \in \mathcal{B}_2$. Ne segue che anche $A_1 \cap A_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Questo mostra che $\mathcal{A}$ è una topologia. Dato che, per costruzione, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e ogni elemento di $\mathcal{A}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, è anche chiaro che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{A}$.

La proposizione che segue dice essenzialmente che, nel verificare la continuità delle applicazioni, basta vedere come si comportano per immagine inversa gli elementi di una base.

Proposizione 3. *Siano X e Y spazi topologici, e sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia di Y. Una applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ è aperto in X.*

Dato che gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti in Y, le loro immagini inverse sono aperte quando f è continua. Viceversa, supponiamo che le immagini inverse di elementi di $\mathcal{B}$ siano tutte aperte. Se A è aperto in Y possiamo scrivere

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i\,,$$

dove B_i appartiene a $\mathcal{B}$. Ma allora

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

è aperto in X perchè unione di aperti. Ciò completa la dimostrazione.

Esempio 4. Siano X_1 e X_2 spazi topologici, e indichiamo con $\mathcal{A}_i$ la topologia di X_i. Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di sottinsiemi di $X_1 \times X_2$ i cui elementi sono tutti i prodotti $A_1 \times A_2$, dove $A_i \in \mathcal{A}_i$. Verifichiamo che $\mathcal{B}$ soddisfa le proprietà *i)* e *ii)* della Proposizione 2, e quindi è base di una topologia su $X_1 \times X_2$. Notiamo innanzitutto che $X_1 \times X_2$ appartiene a $\mathcal{B}$, e quindi $\bigcup \mathcal{B} = X_1 \times X_2$. Se poi $A_1 \times A_2$ e $B_1 \times B_2$ sono elementi di $\mathcal{B}$, si ha che

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)\,,$$

e quindi anche *ii)* è soddisfatta, dato che $A_1 \cap B_1$ e $A_2 \cap B_2$ sono aperti in X_1 e in X_2. La topologia di $X_1 \times X_2$ definita da $\mathcal{B}$ è quella i cui aperti sono le unioni di prodotti $A_1 \times A_2$, dove A_1 è aperto in X_1 e A_2 in X_2 , e cioè la topologia prodotto.

Siano ora $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi per le topologie di X_1 e X_2, e sia $\mathcal{C}$ la famiglia di tutti i prodotti $B_1 \times B_2$, dove $B_i \in \mathcal{B}_i$. Osserviamo che anche $\mathcal{C}$ è una base per la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$. Innanzitutto gli elementi di $\mathcal{C}$ sono anche elementi di $\mathcal{B}$, e quindi sono aperti nella topologia prodotto. Dato che ogni aperto nella topologia prodotto è unione di elementi di $\mathcal{B}$, basta poi vedere che ogni elemento di $\mathcal{B}$ è a sua volta unione di elementi di $\mathcal{C}$. Sia allora $A \times B$ un elemento di $\mathcal{B}$, e scriviamo

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i\,, \quad B = \bigcup_{j \in J} B_j\,,$$

dove gli A_i appartengono a $\mathcal{B}_1$ e i B_j a $\mathcal{B}_2$. Si può dunque scrivere

$$A \times B = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_i \times B_j\,.$$

Questo mostra che $A \times B$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$. Quindi $\mathcal{C}$ è una base per la topologia prodotto su $X_1 \times X_2$.

Esempio 5. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X. Sia Y un sottospazio non vuoto di X e si ponga $\mathcal{C} = \{Y \cap B \,|\, B \in \mathcal{B}\}$. Vogliamo mostrare che $\mathcal{C}$ è una base per la topologia indotta su Y. Vi sono due cose da verificare. La prima è che gli elementi di $\mathcal{C}$ siano aperti nella topologia indotta di Y. Questo è chiaro dato che gli elementi di $\mathcal{C}$ sono intersezioni di aperti di X con Y. La seconda cosa da verificare è che ogni aperto in Y sia unione di elementi di $\mathcal{C}$. Ogni aperto in Y è della forma $Y \cap A$, dove A è un aperto di X. Possiamo scrivere

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i \,,$$

dove i B_i sono elementi di $\mathcal{B}$. Ma allora

$$Y \cap A = \bigcup_{i \in I} Y \cap B_i \,,$$

e quindi $Y \cap A$ è unione di elementi di $\mathcal{C}$.

La nozione di base è spesso utile per semplificare verifiche e dimostrazioni in topologia generale. Un esempio è il criterio di continuità dato dalla Proposizione 3. Un altro esempio è il seguente risultato.

Proposizione 6. *Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{B}$ una sua base. Allora X è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto di X con elementi di $\mathcal{B}$ ha un sottoricoprimento finito.*

Poiché gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti basta dimostrare il "se". Supponiamo allora che

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \,,$$

dove gli A_i sono aperti. Per ogni i vi è una sottofamiglia $\mathcal{B}_i$ di $\mathcal{B}$ tale che $A_i = \bigcup \mathcal{B}_i$, e dunque si ha che $X = \bigcup \mathcal{B}'$, dove

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \,.$$

Inoltre per ogni $B \in \mathcal{B}'$ vi è un indice $i(B)$ tale che $B \subset A_{i(B)}$. Per ipotesi vi è una sottofamiglia *finita* $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$ tale che $X = \bigcup \mathcal{B}''$. Ne segue che

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} A_{i(B)} \,,$$

e quindi che $\{A_{i(B)} \,|\, B \in \mathcal{B}''\}$ è un sottoricoprimento finito di $\{A_i \,|\, i \in I\}$.