Quadriche

Maurizio Cornalba

7/6/2016

Sia K un campo. Informalmente, una ipersuperficie (algebrica) nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_K$ è il luogo dei punti $[t_0 : t_1 : \cdots : t_n]$ tali che $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ è soluzione di una equazione

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

dove F è un polinomio omogeneo non nullo e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^n_K$. Questa definizione ha però molti difetti. Ad esempio, quando il campo è $\mathbb{R}$ e $F(x_0, \ldots, x_n) = \sum_i x_i^2$ il luogo in questione è vuoto. Un altro problema è illustrato dal seguente esempio. Se $F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + ax_1x_2$, dove a è una costante, il luogo delle soluzioni di $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è l'unione delle due rette di equazioni $x_1 = 0$ e $x_1 + ax_2 = 0$. Queste due rette coincidono per $a = 0$, ma in questo caso "moralmente" il luogo delle soluzioni va visto come la retta di equazione $x_1 = 0$ "contata due volte". Per questi e altri motivi conviene considerare equivalenti polinomi omogenei che sono tra loro proporzionali (per una costante non nulla) e definire una *ipersuperficie algebrica di grado d in $\mathbb{P}^n_K$* come la classe di equivalenza di un polinomio omogeneo di grado d. A volte il luogo delle soluzioni dell'equazione $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ è detto *sostegno* della corrispondente ipersuperficie. Analogamente possiamo definire una *ipersuperficie algebrica di grado d nello spazio affine $\mathbb{A}^n_K$*, identificato a K^n tramite coordinate $y_1, \ldots, y_n$, come la classe di equivalenza modulo omotetia di un polinomio (non necessariamente omogeneo) $P(y_1, \ldots, y_n)$ di grado d. Anche in questa situazione si può parlare di supporto.

Ricordiamo che K^n può essere identificato (ad esempio) al luogo in $\mathbb{P}^n_K$ dove $x_0 \neq 0$ tramite la mappa

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto [1 : y_1 : \cdots : y_n]$$

la cui inversa è

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Nel seguito faremo sempre questa identificazione. Vi è una corrispondenza biunivoca tra ipersuperfici affini di grado d e ipersuperfici proiettive di grado d la cui equazione non è divisibile per x_0, cioè il cui supporto non contiene l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$, data da

$$P(y_1, \ldots, y_n) \mapsto F(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d P(1, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$$
$$F(x_0, \ldots, x_n) \mapsto P(y_1, \ldots, y_n) = F(1, y_1, \ldots, y_n)$$

Diremo che due ipersuperfici in $\mathbb{P}^n_K$ di equazioni $F = 0$ e $G = 0$ sono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività che trasforma l'una nell'altra, cioè se esistono una applicazione lineare biunivoca $\alpha : K^{n+1} \to K^{n+1}$ e uno scalare $k \neq 0$ tali che

$$F \circ \alpha = kG$$

In modo analogo si può definire l'*equivalenza affine* tra ipersuperfici in K^n: due ipersuperfici affini di equazioni $P(y_1, \ldots, y_n) = 0$ e $Q(y_1, \ldots, y_n) = 0$ sono dette equivalenti se esistono una trasformazione affine β e uno scalare non nullo h tali che $P \circ \beta = hQ$.

Le ipersuperfici di grado 2 si chiamano *quadriche*; le quadriche in $\mathbb{P}^2_K$ o in K^2 si chiamano anche *coniche*. In queste note ci proponiamo innanzitutto di classificare le quadriche modulo equivalenza proiettiva e modulo equivalenza affine. Lo faremo solo per $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{R}$. Nella discussione identificheremo K^ℓ allo spazio delle matrici colonna a ℓ componenti in K.

Classificazione proiettiva delle quadriche

Un polinomio omogeneo di secondo grado può essere scritto sotto la forma

$$F(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} q_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2q_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$$

dove $q_{ij} = q_{ji}$ per ogni i e ogni j, cioè sotto la forma

$$^tXQX \tag{1}$$

dove Q è la matrice simmetrica $(n+1) \times (n+1)$ i cui elementi sono gli scalari q_{ij} e X è il vettore colonna $^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Diremo che la corrispondente quadrica in $\mathbb{P}^n$ è *non degenere* se la matrice Q non è singolare, *degenere* in caso contrario. L'equivalenza proiettiva tra quadriche si riduce dunque, a meno di moltiplicazione per scalari non nulli, all'equivalenza tra le corrispondente forme quadratiche. In altre parole, la quadrica (1) è proiettivamente equivalente alla quadrica ^tXPX se e solo se esistono una matrice invertibile M e uno scalare non nullo k tali che

$$k \cdot P = {}^tMQM$$

Se $K = \mathbb{C}$ il solo invariante di una forma quadratica è il rango. Dunque, se r è il rango di Q e indichiamo con I_r la matrice identità $r \times r$, la quadrica (1) è proiettivamente equivalente alla quadrica ^tXQ_rX, dove Q_r è la matrice a blocchi

$$Q_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quando $K = \mathbb{R}$ la situazione è leggermente più complicata. Il teorema di Sylvester dice che ogni forma quadratica è equivalente a una la cui matrice, scritta in forma a blocchi, è del tipo

$$Q_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $p+q$ è il rango e (p,q) la segnatura della forma quadratica stessa. D'altra parte la quadrica $^tXQ_{p,q}X$ è equivalente a $-\,^tXQ_{p,q}X$, e questa a sua volta a $^tXQ_{q,p}X$. Dunque le classi di equivalenza proiettiva di quadriche reali sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle matrici $Q_{p,q}$ tali che $p+q > 0$ e $p \geq q$. A titolo di esempio, la classificazione che ne risulta per le coniche è la seguente:

1. $p = 3$, $q = 0$: conica senza punti reali (nel senso che l'equazione $^tXQ_{p,q}X = 0$ non ha soluzioni reali non nulle);

2. $p = 2$, $q = 1$: conica non degenere con punti reali;

3. $p = 2$, $q = 0$: conica degenere con un solo punto reale;

4. $p = 1$, $q = 1$: unione di due rette;

5. $p = 1$, $q = 0$: retta doppia.

Le coniche non degeneri con punti reali sono quelle che vanno comunemente sotto il nome di ellissi, iperbole e parabole; la distinzione tra questi diversi tipi non è di carattere proiettivo, ma solo affine, come vedremo tra poco.

La classificazione delle quadriche degeneri può in un certo senso essere ridotta a quella delle quadriche non degeneri. Supponiamo ad esempio che la quadrica A definita dalla forma quadratica (1) sia degenere. Indichiamo con V lo spazio nullo della forma, cioè il sottospazio di K^{n+1} costituito dai vettori X tali che ${}^tYQX =$ per ogni $Y \in K^{n+1}$. Il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}V$ è contenuto nel supporto di A. Scegliamo inoltre un sottospazio $W \subset K^{n+1}$ che sia complementare a V, tale cioè che $V \cap W = \{0\}$ e $V + W = K^{n+1}$. La restrizione di (1) a W definisce una quadrica non degenere B in $\mathbb{P}W$, il cui supporto è ovviamente contenuto in quello di A. Supponiamo poi che X appartenga a V e $[X']$ appartenga al supporto di B. Allora per ogni scelta di $a, b \in K$

$${}^t(aX' + bX)Q(aX' + bX) = a^2\, {}^tX'QX' + b^2\, {}^tXQX + 2ab\, {}^tX'QX = a^2\, {}^tX'QX' = 0$$

In altre parole, il supporto di A contiene tutte le rette congiungenti punti di $\mathbb{P}V$ a punti del supporto di B. Viceversa, se p è un punto di $\mathbb{P}V$ e q un punto del supporto di A non appartenente a $\mathbb{P}V$, allora la retta congiungente p a q interseca $\mathbb{P}W$ in un unico punto, che appartiene al supporto di B. In conclusione il supporto di A è l'unione di $\mathbb{P}V$ e di tutte le rette congiungenti punti di $\mathbb{P}V$ a punti del supporto di B.

Classificazione affine delle quadriche

Veniamo ora alla classificazione affine delle quadriche. Ci limiteremo a trattare il caso non degenere; quello degenere può essere ridotto al precedente tramite le considerazioni appena svolte. Ricordiamo che le trasformazioni affini in K^n sono composizioni di traslazioni e di applicazioni lineari invertibili. Sia C un elemento di K^n, pensato come matrice colonna. La traslazione di vettore C è

$$Y \mapsto Y + C$$

Dato che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Y + C \end{pmatrix}$$

la traslazione in questione è la restrizione a K^n della proiettività di $\mathbb{P}^n$ data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$$

Analogamente, la trasformazione lineare invertibile $K^n \to K^n$ di matrice M si estende alla proiettività di $\mathbb{P}^n$ di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Combinando queste due osservazioni si conclude che la composizione (da destra a sinistra) della applicazione lineare di matrice M della traslazione di vettore C si estende alla proiettività di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix}$$

Nel seguito useremo questa corrispondenza per identificare ogni affinità alla corrispondente proiettività. D'ora in poi $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{R}$. Veniamo alla quadrica (1). Scriviamo

$$Q = \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & A \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove a è uno scalare, V una matrice colonna e A una matrice simmetrica $n \times n$. Vi è una matrice invertibile M tale che ${}^tMAM = Q_{p,q}$ (con $q = 0$ se $K = \mathbb{C}$). Notiamo subito che $p + q \geq n - 1$. Infatti se $p + q$ fosse minore di $n - 1$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tM \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & {}^tVM \\ {}^tMV & Q_{p,q} \end{pmatrix} \tag{3}$$

avrebbe almeno due righe tra loro proporzionali. Dunque sarebbe singolare, e lo stesso sarebbe vero di Q, contro le ipotesi.

Supponiamo dapprima che A sia invertibile. Poniamo $C = -A^{-1}V$. Questo punto di K^n è chiamato *centro* della quadrica. Quest'ultima è equivalente, dal punto di vista affine, alla quadrica di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^tC \\ 0 & I \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^tC \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

e qunque anche alla quadrica di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & Q_{p,q} \end{pmatrix}$$

Si noti che $b \neq 0$ dato che Q è invertibile. Nel caso complesso, o nel caso reale quando $b > 0$, si può effettuare l'ulteriore trasformazione affine

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & Q_{p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & bQ_{p,q} \end{pmatrix}$$

dove $\beta^2 = b$, e dunque concludere che la quadrica di partenza è equivalente dal punto di vista affine a quella di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{p,q} \end{pmatrix}$$

Nel caso reale, se $b < 0$, un ragionamento analogo mostra che la quadrica originale è equivalente dal punto di vista affine a quella di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{q,p} \end{pmatrix}$$

Ne concludiamo che in ogni caso una quadrica non degenere per la quale A sia invertibile è equivalente dal punto di vista affine a quella di equazione

$$1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$$

nel caso complesso e a una e una sola tra le quadriche

$$1 + \sum_{i=1}^{h} y_i^2 - \sum_{i=h+11}^{n} y_i^2 = 0$$

nel caso reale. Per $n = 2$, cioè per le coniche, i casi possibili sono:

$h = 0$: ellisse

$h = 1$: iperbole

$h = 2$: conica senza punti reali

Occupiamoci ora del caso in cui A è singolare e quindi, come si è osservato, di rango $n-1$. Dal punto di vista affine la nostra quadrica è equivalente a una con matrice della forma (3), con $p+q = n-1$. Naturalmente se $K = \mathbb{C}$ si può supporre che $q = 0$. Per mezzo di una opportuna traslazione ci si può ulteriormente ridurre a una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} c & 0 & d \\ 0 & Q_{p,q} & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove c e d sono scalari. Si noti che $d \neq 0$ perché Q non è singolare. Questo mostra che la quadrica originaria è equivalente a una di equazione affine

$$c + 2dy_n + \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1} x_i^2 = 0$$

o anche, via la trasformazione affine $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, c + 2dy_n)$, alla quadrica

$$y_n + \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1} x_i^2 = 0$$

Inoltre, dato che cambiare il segno di y_n è una trasformazione affine, si può supporre che $p \geq q$. Per $n = 2$ l'unico caso possibile è $p = 1$, $q = 0$, che dà luogo a una parabola.

La classificazione che abbiamo appena completata mostra che nel caso complesso ci sono solo due tipi di quadriche affini, le cui equazioni sono rispettivamente

$$1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \quad \text{e} \quad y_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = 0$$

La situazione è più variegata nel caso reale, che illustreremo nel caso particolare delle quadriche nello spazio affine tridimensionale. I casi possibili sono i seguenti:

1. $1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ (quadrica senza punti reali)
2. $1 + y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ (iperboloide a due falde)
3. $1 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$ (iperboloide a una falda)
4. $1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$ (ellissoide)
5. $y_3 + y_1^2 + y_2^2 = 0$ (paraboloide ellittico)
6. $y_3 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ (paraboloide iperbolico)

Classificazione euclidea delle quadriche reali

Per le quadriche reali l'equivalenza affine può essere rimpiazzata da una equivalenza più fine, quella euclidea o per isometrie. Ricordiamo che una isometria di $\mathbb{R}^n$ è una applicazione biunivoca di $\mathbb{R}^n$ in sè che rispetta le distanze (euclidee). Ricordiamo anche che una isometria che mandi l'origine nell'origine è necessariamente lineare, ed è una trasformazione ortogonale. Le traslazioni sono ovviamente isometrie. Dunque le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le composizioni di una trasformazione ortogonale e di una traslazione. In altre parole, esse corrispondono alle proiettività di $\mathbb{P}^n$ con matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix}$$

tale che ${}^tMM = I_n$. Due quadriche affini di equazioni $F(y_1, \dots, y_n) = 0$ e $G(y_1, \dots, y_n) = 0$ sono dette *isometriche* se esistono una isometria β e uno scalare non nullo h tali che $G \circ \beta = hF$. Sia data una quadrica non degenere come in (1) e scriviamo la matrice Q sotto la forma (2). Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale $n \times n$ tale che

$$\Delta = {}^tMAM$$

sia diagonale. Ragionando esattamente come per l'equivalenza affine si mostra che la quadrica data è isometrica a una e una sola[1] tra le seguenti:

$$1 + \sum_{i=1}^{h} d_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{k} e_i y_i^2 = 0$$

$$y_n + \sum_{i=1}^{p} f_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{q} g_i y_i^2 = 0$$

dove $h + k = n$, $p + q = n - 1$, $p \geq q$, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_h > 0$, $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_k > 0$, $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_p > 0$ e $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_q > 0$.

[1] C'è una piccola eccezione. In effetti, se $p = q$, $y_n + \sum_{i=1}^{p} f_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{q} g_i y_i^2 = 0$ e $y_n + \sum_{i=1}^{p} g_i y_i^2 - \sum_{i=1}^{q} f_i y_i^2 = 0$ sono equivalenti.