I quaternioni

Sia A un insieme non vuoto, munito di due operazioni

$$s : A \times A \to A\,, \qquad p : A \times A \to A\,,$$

che chiameremo *somma* e *prodotto*. Invece di $s(a,b)$ scriveremo $a+b$ e invece di $p(a,b)$ scriveremo ab. Diremo che $A, +, \cdot$ è un *anello con divisione* se valgono le seguenti proprietà:

(1) A, con l'operazione di somma, è un gruppo abeliano;
(2) $A^\times = A - \{0\}$, con l'operazione di prodotto, è un gruppo (non necessariamente abeliano);
(3) dati comunque $a, b, c \in A$,

$$a(b+c) = ab + ac\,, \quad (b+c)a = ba + ca\,.$$

Si noti che, in un anello con divisione, $a\cdot 0 = a(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0$ e quindi, per cancellazione, $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in A$. Allo stesso modo si mostra che $0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in A$. In particolare, se 1 è l'elemento neutro per il prodotto in $A^\times$, allora $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$. Quindi $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ per ogni $a \in A$.

Sia $\mathbb{H}$ l'insieme delle coppie (z, w) di numeri complessi, con le operazioni

$$\begin{aligned}(z,w) + (z',w') &= (z+z', w+w')\,,\\ (z,w)(z',w') &= (zz' - w\overline{w'}, zw' + w\overline{z'})\,.\end{aligned}$$

Si mostri che $\mathbb{H}$, con queste operazioni, verifica le proprietà (1) e (3), che vale la proprietà associativa per il prodotto e che $\mathbf{1} = (1,0)$ è un elemento neutro per la moltiplicazione in $\mathbb{H}$. Si mostri che, se $(z,w) \in \mathbb{H}$ e $x \in \mathbb{C}$, allora $(x,0)(z,w) = (xz, xw)$ e $(z,w)(x,0) = (xz, \overline{x}w)$. In particolare, se poniamo $\alpha(x) = (x, 0)$,

$$\alpha(x)h = h\alpha(\overline{x}) \qquad \text{per ogni } h \in \mathbb{H}$$

e inoltre

$$\alpha(x+x') = \alpha(x) + \alpha(x')\,, \qquad \alpha(xx') = \alpha(x)\alpha(x')\,.$$

Questo implica, tra l'altro, che gli elementi non nulli di $\alpha(\mathbb{C})$ hanno un inverso moltiplicativo; più esattamente, l'inverso di $(x,0) = \alpha(x)$ è $\alpha(x^{-1}) = (x^{-1}, 0)$. Sia ora $h = (z,w)$ un elemento di $\mathbb{H}$. Si ponga

$$\tau(h) = (\overline{z}, -w)\,.$$

Si mostri che τ è un antiautomorfismo, nel senso che è una applicazione biunivoca di $\mathbb{H}$ in sè tale che

$$\begin{aligned}\tau(h+h') &= \tau(h) + \tau(h')\,,\\ \tau(hh') &= \tau(h')\tau(h)\,.\end{aligned}$$

Si mostri poi che

$$h\tau(h) = (|z|^2 + |w|^2, 0)\,;$$

ne segue, in particolare, che se $h \neq 0$ allora $h\tau(h)$ è un elemento non nullo e invertibile di $\mathbb{H}$. Se ne deduca che, sempre se $h \neq 0$,

$$\tau(h)(h\tau(h))^{-1}$$

è un inverso moltiplicativo di h. Dunque $\mathbb{H}$ è un anello con divisione. Si ponga poi

$$\mathbf{i} = (i, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1)\,, \quad \mathbf{k} = (0, i)\,,$$

e si mostri che

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}\,, \\ &\mathbf{ij} = \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}\,, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}\,. \end{aligned}$$

Se ne deduca che

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}\,, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}\,,$$

e dunque, in particolare, che il prodotto in $\mathbb{H}$ non è commutativo.