GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - primo luglio 2015 - soluzione

1.
$R_1 \; : \; x' = y, \qquad y' = x \;$;
$R_2 \; : \; x' = -y, \qquad y' = -x \;$;
$R \;\; : \; x' = -x, \qquad y' = -y \;$.
L'isometria R è la simmetria rispetto all'origine. Si noti che la composta delle riflessioni (o simmetrie) rispetto a due rette ortogonali del piano euclideo è sempre la simmetria rispetto al punto comune alle due rette. Si può osservare che queste tre simmetrie, con l'identità, formano un gruppo, isomorfo al quadrigruppo del Klein.

La trasformazione S è la riflessione rispetto alla retta $y = 3$. Si vede subito, infatti, che si tratta di un'isometria inversa e che i punti fissi, nel piano euclideo, sono tutti e soli i punti di coordinate $(x, 3)$, con x numero reale arbitrario.

L'estensione di S a $P_2(\mathbb{R})$ si rappresenta (nelle coordinate omogenee $[x_1, x_2, x_3]$ indicate all'inizio dell'esercizio) nel modo seguente:
$x_1' = x_1, \qquad x_2' = -x_2 + 6x_3, \qquad x_3' = x_3$.
Detta A la matrice dei coefficienti di tale trasformazione, è noto che le coordinate omogenee dei punti fissi (in $P_2(\mathbb{R})$) sono gli autovettori della matrice A . Però, in questo caso, i calcoli confermano ciò che era già evidente: i punti fissi sono i punti dell'asse di simmetria (punto improprio compreso) e il punto improprio delle rette ortogonali all'asse (cioè, il punto improprio dell'asse y).
Analogamente, si vede subito che le rette fisse sono l'asse di simmetria e tutte le rette per il punto improprio dell'asse y (cioè, le rette proprie parallele all'asse y e la retta impropria).
Di nuovo, comunque, si può trovare una conferma mediante calcoli di algebra lineare.
Questa volta, occorre usare le terne omogenee $[a_1, a_2, a_3]$ dei coefficienti dell'equazione di una retta (in coordinate omogenee): $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.
E' noto che la trasformazione indotta sulle rette dalla proiettività in esame (l'estensione di S a $P_2(\mathbb{R})$) è rappresentata dall'inversa della trasposta della matrice A . Si ha dunque:
$a_1' = a_1, \qquad a_2' = -a_2, \qquad a_3' = 6a_2 + a_3$.
Per esempio, cerchiamo l'immagine della retta $y = x$.
Si ha: $[a_1, a_2, a_3] = [1, -1, 0]$; $[a_1', a_2', a_3'] = [1, 1, -6]$.
La retta immagine è dunque rappresentata dall'equazione $y = -x + 6$.
Le terne dei coefficienti delle rette fisse sono gli autovettori dell'inversa della trasposta di A , o anche (il che di solito semplifica i calcoli) gli autovettori della trasposta di A .
All'autovalore 1 si associa un fascio di rette fisse, all'autovalore -1 un'unica retta fissa (l'asse di simmetria).

E' chiaro che, tra le proiettività di $P_2(\mathbb{R})$ che hanno gli stessi punti fissi di S , non esistono similitudini non isometriche. Infatti, tutte la distanze sull'asse di simmetria sono conservate; dunque il rapporto di similitudine non può essere altro che 1 .

Così pure, non esistono proiettività che non siano trasformazioni affini. Infatti, sulla retta impropria ci sono due punti fissi distinti; dunque la retta impropria è certamente una retta fissa.

Esistono invece affinità che non sono similitudini.
Per trovarle, è più comodo lavorare con le coordinate cartesiane non omogenee.

Cominciamo ad osservare che ogni retta (propria) parallela all'asse y è una retta fissa; dunque l'ascissa di ogni punto e l'ascissa della sua immagine coincidono.
Inoltre, ogni parallela all'asse x ha per immagine ancora una parallela all'asse x; dunque l'ordinata dell'immagine di un punto P dipende soltanto dall'ordinata di P e non dall'ascissa di P.

Siamo così condotti a una trasformazione del tipo seguente:

$x' = x, \quad y' = ay + b$.

Il coefficiente a è necessariamente diverso da 0. Deve anche essere diverso da 1, altrimenti si avrebbe una traslazione (o, come caso particolare, l'identità).

Per $y = 3$ si deve avere $y' = 3$. Quindi, l'equazione $y = ay + b$ deve avere per soluzione $y = 3$. Se ne deduce: $b = 3(1 - a)$.
La trasformazione assume dunque l'aspetto:

$x' = x, \quad y' = ay + 3(1 - a)$.

Per $a = -1$ si ritrova l'isometria S.
Per ogni $a \neq 0,\ 1,\ -1$, si ottiene una trasformazione affine nelle condizioni volute.

Problema: se si volessero trovare le trasformazioni affini che hanno gli stessi punti fissi di S, ma solo nel piano euclideo, senza alcuna condizione sui punti impropri, la soluzione cambierebbe?

La trasformazione $G = S \circ R$ si rappresenta nel modo seguente:

$x' = -x, \quad y' = y + 6$.

Si tratta di una glissosimmetria, che si può ottenere componendo la riflessione rispetto all'asse y e una traslazione in direzione dell'asse y.

Il risultato era prevedibile: l'isometria R è la simmetria rispetto all'origine; dunque si può scrivere come composta delle riflessioni rispetto a due arbitrarie rette ortogonali passanti per l'origine, in particolare come composta, nell'ordine, della riflessione rispetto all'asse y e della riflessione rispetto all'asse x; d'altra parte, componendo le riflessioni rispetto a due rette parallele si ottiene una traslazione in direzione ortogonale.

2.
Classificazione proiettiva:

in campo complesso:
Γ_1 e Γ_2 sono coniche non degeneri, Γ_3 è semplicemente degenere (il supporto è l'unione dei punti delle rette $x_2 - 2x_3 = 0$ e $x_2 - 4x_3 = 0$);
in campo reale:
i supporti di Γ_1 e di Γ_2 sono dotati di punti reali, il supporto di Γ_3 è l'unione dei punti di due rette reali.

Come trovare il supporto di Γ_3? Si può, ad esempio, procedere come segue:

$x_2^2 + 8x_3^2 - 6x_2x_3 = x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2 - x_3^2 = (x_2 - 3x_3)^2 - x_3^2 = \ldots$.

Usare coordinate non omogenee rende, forse, i calcoli più chiari.

Classificazione affine:

Γ_1 è un'iperbole (centro: $[0, 1, 1]$; asintoti: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $x_1 - x_2 + x_3 = 0$); Γ_2 è un'ellisse (centro: $[0, 3, 1]$); il supporto di Γ_3 è l'unione di due rette parallele (si può anche dire che Γ_3 è una parabola degenere).

Precisazioni dal punto di vista euclideo:

Γ_1 è un'iperbole equilatera, Γ_2 è una circonferenza (il centro - già noto - è $(0, 3)$, il raggio è 1).

I supporti di Γ_1 e di Γ_2 si intersecano soltanto nel punto $[0, 2, 1]$.
I supporti di Γ_2 e di Γ_3 si intersecano nei punti $[0, 2, 1]$ e $[0, 4, 1]$; in tali punti, le rette componenti il supporto di Γ_3 sono tangenti a Γ_2.

I supporti di Γ_1 e di Γ_3 si intersecano nel punto $[0,2,1]$ (nel quale sono tangenti) e nei punti $[-2\sqrt{2},4,1]$ e $[2\sqrt{2},4,1]$.

3.
Dopo quanto detto, il disegno non dovrebbe presentare difficoltà.

Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ non sono nè connessi nè compatti; $\Gamma_{2,0}$ è connesso e compatto.

Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ sono omeomorfi, perchè ciascuna componente connessa di $\Gamma_{1,0}$ è omeomorfa a una retta.

Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ non sono omeomorfi agli altri due. Questi ultimi infatti contengono punti che non hanno alcun intorno omeomorfo ad un intervallo. Più precisamente, $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{3,0}$ contiene tre di tali punti, mentre $\Gamma_{2,0} \cup \Gamma_{3,0}$ ne contiene uno solo. Questo esclude che siano omeomorfi tra loro.

Si può anche ragionare su proprietà di connessione.
In $\Gamma_{1,0}$ e in $\Gamma_{3,0}$ il complementare di ogni punto ha tre componenti connesse.
In $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{3,0}$ esistono infiniti punti il cui complementare ha due componenti connesse, infiniti punti il cui complementare ha tre componenti connesse, tre punti il cui complementare ha quattro componenti connesse.
In $\Gamma_{2,0} \cup \Gamma_{3,0}$ esistono infiniti punti il cui complementare ha due componenti connesse, infiniti punti il cui complementare ha tre componenti connesse, un solo punto il cui complementare ha quattro componenti connesse.

Fra i quattro insiemi considerati, non ve ne sono due equivalenti dal punto di vista affine. Se ve ne fossero, sarebbero anche omeomorfi, ed è chiaro che $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ non sono equivalenti dal punto di vista affine.

4.
La prima affermazione è falsa. Basta un disegno per convincersene.

Un esempio esplicito potrebbe essere il seguente.

Consideriamo, nel piano euclideo,
la parabola $y = x^2$ e le circonferenze $x^2 + y^2 - 2hy = 0$, con $h > 0$.
La parabola e ciascuna circonferenza sono tangenti nell'origine. Per $2h - 1 > 0$ hanno altri due punti reali in comune.

Anche la seconda affermazione è falsa.

Sarebbe vera per coniche non degeneri o, meglio, sotto l'ipotesi che una almeno delle due coniche non sia degenere. Ma i supporti di due coniche distinte entrambe degeneri possono avere in comune i punti di una retta.

Un esempio esplicito potrebbe essere il seguente.

Consideriamo, nel piano proiettivo reale, le coniche degeneri: $x_1x_2 = 0$ e $x_1^2 + x_1x_3 = 0$, oppure le coniche degeneri: $x_1x_2 = 0$ e $x_1^2 = 0$.
In entrambi i casi, hanno in comune gli infiniti punti della retta $x_1 = 0$.