GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 9 settembre 2015

Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali monometriche, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $P_2(\mathbb{R})$ (dunque $x_3 = 0$ è l'equazione della retta impropria).

Se Γ è una conica, con la notazione "Γ_0" si indicherà l'intersezione del supporto di Γ con il piano euclideo, cioè *l'insieme dei punti propri del supporto di* Γ .

1. Siano:
S_1 la simmetria rispetto al punto di coordinate $(1, 0)$,
S_2 la simmetria rispetto al punto di coordinate $(-1, 0)$,
S_3 la simmetria (o riflessione) rispetto alla retta di equazione $x = 1$.

Si definiscano poi: $H_1 = S_3 \circ S_1$, $H_2 = S_3 \circ S_2$.

Si dica - giustificando la risposta - di che tipo sono le isometrie H_1 e H_2 .

Esistono punti del piano euclideo lasciati fissi da H_2 ?
Esistono rette del piano euclideo lasciate fisse da H_2 ?
Esistono coniche semplicemente degeneri tali che l'insieme dei punti propri del loro supporto sia lasciato fisso da H_2 ?

Si estenda H_2 a $P_2(\mathbb{R})$ e, in $P_2(\mathbb{R})$, se ne trovino i punti fissi.

2. Si considerino poi in $P_2(\mathbb{R})$ le coniche Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 di equazioni

Γ_1 : $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = 0$;
Γ_2 : $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 = 0$;
Γ_3 : $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 4x_1x_3 = 0$.

Si classifichino Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 dai punti di vista proiettivo e affine, con eventuali precisazioni dal punto di vista euclideo.

Si osservi che vale: $f_1 - f_2 + f_3 = 0$. Quali conseguenze ha questo fatto sulle intersezioni dei supporti delle tre coniche a due a due?

3. Si considerino ora anche $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$ e si illustrino con un disegno la loro posizione e le loro intersezioni.

Di ciascuno degli insiemi $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{2,0}$ (sottoinsiemi del piano euclideo), si dica se è connesso, se è compatto, se è completo.

Si dica quali isometrie lasciano (globalmente) fisso l'insieme $\Gamma_{1,0}$.

Si dica quali isometrie lasciano (globalmente) fisso l'insieme $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{2,0} \cup S_3(\Gamma_{1,0})$.

Si dica se $\Gamma_{2,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ (sottoinsiemi del piano euclideo) sono omeomorfi e se sono equivalenti dal punto di vista affine.

4. Vero o falso?

1. ogni isometria del piano euclideo lascia fissi i supporti di infinite coniche, dotate di punti reali;

2. ogni isometria del piano euclideo lascia fissi i supporti di infinite coniche, non degeneri, dotate di punti reali.