Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia del 22 settembre 2015

1. Siano X e Y spazi topologici e siano A e B sottoinsiemi di X tali che $X = A \cup B$. Supponiamo che A sia aperto in X. Siano $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ applicazioni continue tali che $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$.

   (a) Mostrare che se B è aperto in X esiste una applicazione continua $h : X \to Y$ tale che $h_{|A} = f$ e $h_{|B} = g$.

   (b) Mostrare con esempi che la conclusione del punto precedente non è necessariamente vera se non si suppone B aperto.

   (c) Supponiamo che B sia aperto in X e che X e Y siano spazi metrici. Supponiamo inoltre che f e g siano Lipschitziane. Mostrare con esempi che h non è necessariamente Lipschitziana.

2. Consideriamo i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   - $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
   - $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
   - $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

   Per ognuno dei seguenti spazi topologici dire se è di Hausdorff, compatto, connesso, connesso per archi:

   - $X = \mathbb{R}^2/C$
   - $Y = \mathbb{R}^2/(C \cup F)$
   - $W = \mathbb{R}^2/F$
   - $Z = (C \cup F) \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D \times \{1/n\}\right) \subset \mathbb{R}^3$

3. Indichiamo con I l'intervallo $[0, 1]$ e con $F(I, I)$ lo spazio delle funzioni $I \to I$, munito della metrica uniforme. Sia V il sottospazio di $F(I, I)$ costituito dalle funzioni non decrescenti e $W \subset V$ il sottospazio delle funzioni non decrescenti e continue.

   (a) Mostrare che V e W sono completi.

   (b) W è compatto?

   (c) V è compatto?

Soluzioni

1. (a) Poniamo $h(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in B$. Questa è una buona definizione perché $f(x) = g(x)$ se $x \in A \cap B$. Se U è aperto in Y, $h^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$. Dato che f e g sono continue, $f^{-1}(U)$ è aperto in A e $g^{-1}(U)$ è aperto in B. Dato che A e B sono aperti in X, $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(U)$ sono aperti anche in X. Quindi $h^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$ è aperto.

   (b) $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$, $B = \{1\}$, $f(x) = 0$ per ogni $x \in A$, $g(1) = 1$.

(c) $X = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \{0,1\}\} \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$, $f(x,0) = 0$, $g(x,1) = x$. Le funzioni f e g sono Lipschitziane ma h no perché $\|(x,1) - (x,0)\| = 1$ ma

$$\|h(x,1) - h(x,0)\| = \|g(x,1) - f(x,0)\| = |x|$$

2. X, Y, W sono connessi e connessi per archi perché immagini di connessi per archi tramite applicazioni continue.

   Z non è connesso e quindi non è connesso per archi. Due aperti disgiunti non vuoti la cui unione è Z sono ad esempio $A = (C \cup F) \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} D \times \{1/n\}\right)$ e $B = D \times \{1\}$

   Y è omeomorfo a $(D \cup C)/C$ quindi è compatto perché immagine di un compatto $(D \cup C)$ tramite una applicazione continua. W è omeomorfo a

$$\frac{\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}}{\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}}$$

   quindi è compatto perché immagine di un compatto tramite una applicazione continua.

   Z non è compatto perché la sua immagine tramite l'applicazione continua $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ è $\mathbb{R}^2$ che non è compatto.

   X non è compatto. Sia $\alpha : \mathbb{R}^2 \to X$ la mappa quoziente. La famiglia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}, n \geq 2}$, dove

$$A_n = \alpha(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < n\})$$

   è un ricoprimento aperto di X che non ha sottoricoprimenti finiti.

   X e Y sono di Hausdorff. Mostriamolo per X; il ragionamento per Y è identico, ricordando che è omeomorfo a $(D \cup C)/C$. Indichiamo con p il punto di X immagine di C. Siano x e y punti distinti di X, immagini di punti $x', y' \in \mathbb{R}^2$. Se sono distinti da p, $x', y' \notin C$ e ci sono dischi U' e V' centrati in x' e y' che non si intersecano e non intersecano C. Se invece $y = p$ ci sono intorni aperti disgiunti U' e V' di x e C, dato che C è compatto. Siano U e V le immagini in X di U' e V'. Allora U e V sono aperti contenenti rispettivamente x e y e non si intersecano.

   W non è di Hausdorff. Se $x \in C$ ogni intorno di x interseca F. Quindi l'immagine di x in W e il punto immagine di F in W non hanno intorni disgiunti.

   Z è di Hausdorff perché è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che è di Hausdorff.

3. (a) Sia $C(I,I)$ il sottospazio di $F(I,I)$ costituito dalle funzioni continue. Dato che I è completo, $F(I,I)$ è completo. Inoltre $C(I,I)$ è chiuso in $F(I,I)$, e quindi completo. Dato che $W = V \cap C(I,I)$, basta mostrare che V è completo, e questo segue se si mostra che V è chiuso in $F(I,I)$. Sia f_n una successione in V convergente uniformemente a $f \in F(I,I)$. Allora, se $x < y$,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \leq \lim_{n \to \infty} f_n(y) = f(y)$$

   perché $f_n(x) \leq f_n(y)$ per ogni n.

(b) No. Consideriamo la successione di funzioni f_n in W così definita:

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{se } t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Questa successione converge puntualmente alla funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Quindi se una sottosuccessione di f_n convergesse uniformemente dovrebbe convergere a f. Ma questo è impossibile perché f non è continua e $C(I, I)$ è chiuso in $F(I, I)$.

(c) No. Se V fosse compatto lo sarebbe anche $W = V \cap C(I, I)$, che è chiuso in V dato che $C(I, I)$ è chiuso in $F(I, I)$.