Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia del 30 giugno 2015

1. Indichiamo con Y lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$, dove $\mathcal{A}$ è la topologia i cui aperti sono le semirette $]a, +\infty[$. Sia X un altro spazio topologico e sia $\alpha : X \to Y$ una funzione continua.

   (a) Mostrare che, se X è compatto, α ha minimo ma può non avere massimo, anzi può essere illimitata superiormente (dare un esempio).

   D'ora in poi supponiamo che α assuma solo valori interi.

   (b) Mostrare che $\alpha^{-1}(y)$ è intersezione di un aperto e di un chiuso per ogni $y \in Y$.

   (c) Mostrare che in generale $\alpha^{-1}(y)$ non è né aperto né chiuso.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano A e B suoi sottinsiemi. Siano d_A una distanza su A e d_B una su B. Supponiamo che le inclusioni $j_A : (A, d_A) \hookrightarrow (X, d)$ e $j_B : (B, d_B) \hookrightarrow (X, d)$ siano continue. Poniamo $W = A \cap B$. Se $x, y \in W$ poniamo

$$d_W(x, y) = d_A(x, y) + d_B(x, y)$$

   (a) Mostrare che d_W è una distanza su W.

   (b) Mostrare che le inclusioni $(W, d_W) \hookrightarrow (A, d_A)$ e $(W, d_W) \hookrightarrow (B, d_B)$ sono continue.

   (c) Mostrare che se (A, d_A) e (B, d_B) sono completi anche (W, d_W) è completo.

   (d) Sia K un sottinsieme di W. Mostrare che K è un sottinsieme compatto di (W, d_W) se e solo se è un sottinsieme compatto sia di (A, d_A) che di (B, d_B).

3. Siano X e Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una applicazione continua. Consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ sull'unione disgiunta $Z = (X \times [0, 1]) \coprod Y$ che identifica ogni punto $(x, 1) \in X \times [0, 1]$ con $f(x) \in Y$ e poniamo $W = Z/\sim$. Notiamo che l'applicazione naturale $Y \to W$ è iniettiva e dà un omeomorfismo di Y con la sua immagine. Identifichiamo quindi Y con la sua immagine in W.

   (a) Mostrare che Y è un retratto di deformazione di W.

   (b) Mostrare che W è connesso se e solo se lo è Y.

Soluzioni

1. (a) $Z = \alpha(X)$ è compatto. Dato che $Z \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, +\infty[$, per compattezza esistono un numero finito di interi $n_1, \dots, n_k$ tali che $Z \subset]n_1, +\infty[\cup \cdots \cup]n_k, +\infty[$, e quindi $Z \subset]m, +\infty[$, dove m è il minimo degli n_i. In conclusione Z è limitato inferiormente. Sia ora a l'estremo inferiore di Z. Per concludere che α ha minimo basta mostrare che $a \in Z$. Se ciò non fosse vero $Z \subset \bigcup_n]a + 1/n, +\infty[$, e chiaramente questo ricoprimento di Z non ammette sottoricoprimenti finiti. Questo contraddice la compattezza di Z.
   Ora sia $X = [0, 1]$. La funzione $\alpha : X \to Y$ definita da

$$\alpha(t) = \begin{cases} n & \text{se } \dfrac{1}{2n+1} < t < \dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   è continua e illimitata.

(b) Se y non è intero $\alpha^{-1}(y)$ è vuoto, quindi l'asserzione è vera. Se y è intero

$$\alpha^{-1}(y) = \alpha^{-1}(A \cap F) = \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(F)$$

dove $A =]y-1, +\infty[$ è aperto e $F =]-\infty, y] = Y \setminus]y, +\infty[$ è chiuso. Dato che α è continua $\alpha^{-1}(A)$ è aperto e $\alpha^{-1}(F)$ è chiuso.

(c) La funzione $\alpha : [0,3] \to Y$ definita ponendo

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 0 \quad \text{se } t \leq 1 \\ \alpha(t) &= 1 \quad \text{se } 1 < t \leq 2 \\ \alpha(t) &= 2 \quad \text{se } 2 < t \end{aligned}$$

è continua e $\alpha^{-1}(1) =]1,2]$ non è né aperto né chiuso in $[0,3]$.

2. (a) La simmetria è ovvia, come il fatto che $d_W(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$. Poi

$$d_W(x,y) = d_A(x,y)+d_B(x,y) \leq d_A(x,z)+d_A(z,y)+d_B(x,z)+d_B(z,y) = d_W(x,z)+d_W(z,y)$$

(b) $d_A(x,y) \leq d_W(x,y)$, quindi $(W, d_W) \hookrightarrow (A, d_A)$ è addirittura lipschitziana di costante 1. Idem per l'inclusione in (B, d_B).

(c) Sia $\{x_n\}$ una successione in W che converge sia in (A, d_A) che in (B, d_B). Indichiamo con x e y i due limiti. Notiamo che

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(y,x_n) = d(j_A(x), j_A(x_n)) + d(j_B(y), j_B(x_n))$$

I due addendi del termine di destra convergono a zero perché j_A e j_B sono continue. Quindi $x = y$. Ora supponiamo che $\{x_n\}$ sia una successione di Cauchy in W. Dato che $d_A \leq d_W \geq d_B$ la successione è di Cauchy sia in A che in B, e quindi converge in entrambi gli spazi a $x \in W$. Poi

$$d_W(x_n, x) = d_A(x_n, x) + d_B(x_n, x)$$

ed entrambi i termini di destra convergono a zero. Quindi $\{x_n\}$ converge a x in W.

(d) Se K è compatto in W lo è anche in A e B perché le inclusioni $(W, d_W) \hookrightarrow (A, d_A)$ e $(W, d_W) \hookrightarrow (B, d_B)$ sono continue. Viceversa, supponiamo K compatto in A e B e sia $\{x_n\}$ una successione in K. Passando a una sottosuccessione possiamo supporre che $\{x_n\}$ converga in A a un punto $x \in K$. Passando a una ulteriore sottosuccessione possiamo supporre che $\{x_n\}$ converga in B a un punto $y \in K$. Per quanto detto sopra $x = y$. Ora

$$d_W(x_n, x) = d_A(x_n, x) + d_B(x_n, x)$$

e i due addendi di destra convergono entrambi a zero.

3. (a) Sia $\pi : Z \to W$ la proiezione naturale. Per ogni $t \in [0,1]$ e ogni $z \in Z$ poniamo:

$$r_t(\pi(z)) = \begin{cases} \pi(x, s(1-t)+t) & \text{se } z = (x,s) \in X \times [0,1] \\ \pi(z) & \text{se } z \in Y \end{cases}$$

La mappa r_t manda W in sè, lascia fissi i punti di $Y \simeq \pi(Y)$, è l'identità per $t = 0$ e ha come immagine Y per $t = 1$. Inoltre $(\pi(z), t) \mapsto r_t(\pi(z))$ è continua per la proprietà universale del quoziente.

(b) Un punto della forma $\pi(x, s)$ è contenuto in un connesso che interseca Y, per esempio $\pi(\{x\} \times [s, 1])$. Quindi se Y è connesso due qualsiasi punti di W sono contenuti in un connesso. Questo implica che W è connesso. Viceversa supponiamo che Y non sia connesso, cioè che sia unione disgiunta di aperti non vuoti A e B. Sia r_t come nel punto precedente. Allora W è unione disgiunta dei due aperti non vuoti $r_1^{-1}(A)$ e $r_1^{-1}(B)$.