Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 4 luglio 2016

1. Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : -x \in A \ \forall x \in A \cap \mathbb{Z}\}.$$

   (a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è uno spazio di Hausdorff.
   (c) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è uno spazio compatto.
   (d) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è uno spazio connesso.
   (e) Trovare una successione in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ convergente a più di un limite.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia F un chiuso in X. Indichiamo con Y il quoziente X/F e con $h : X \to Y$ l'applicazione naturale. Per ogni scelta di $x, x' \in X$ poniamo

$$D(h(x), h(x')) = \min(d(x, x'), d(x, F) + d(x', F))$$

   (a) Mostrare che D è una metrica su Y.
   (b) Mostrare che, se F è compatto, D induce la topologia quoziente su Y.
   (c) Nelle ipotesi del punto precedente mostrare che, se (X, d) è completo, anche (Y, D) lo è.

3. Sia X l'insieme delle funzioni continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tali che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \ \forall x, y \in [-1, 1]$ e $f(x) \geq 3 - 3x^2 \ \forall x \in [-1, 1]$, munito della topologia della convergenza uniforme. Definiamo una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} (f(t) - 1)^2 dt$$

   (a) Mostrare che X è chiuso in $\mathrm{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
   (b) Mostrare che φ è una funzione continua.
   (c) Mostrare che φ ha minimo su X.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ sul campo reale le quadriche

$$\Gamma = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : 4x_0^2 - x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0\right\}$$
$$\Delta = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : 4x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = 0\right\}$$

   e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\right\}$, le quadriche

$$\Gamma_0 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : 4x_0^2 - x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0, x_0 \neq 0\right\}$$
$$\Delta_0 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : 4x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = 0, x_0 \neq 0\right\}$$

   (a) Classificare Γ e Δ dal punto di vista proiettivo e classificare Γ_0 e Δ_0 dal punto di vista affine; illustrare con un disegno Γ_0 e Δ_0 in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare le intersezioni tra Γ e Δ.
   (c) Determinare il numero di componenti connesse di $\Gamma \cup \Delta$ e di $\Gamma \setminus (\Gamma \cap \Delta)$.

Soluzioni

1. (a) L'insieme vuoto e $\mathbb{R}$ appartengono a $\mathcal{T}$, banalmente. Per ogni A e B in $\mathcal{T}$ se $x \in (A \cap B) \cap \mathbb{Z}$ allora $x \in A \cap \mathbb{Z}$ e $x \in B \cap \mathbb{Z}$; perciò $-x \in A$ e $-x \in B$, cioè $-x \in A \cap B$. Infine, se A_i sono elementi di $\mathcal{T}$ e $x \in \mathbb{Z} \cap \bigcup A_i$ allora esiste j tale che $x \in \mathbb{Z} \cap A_j$; quindi $-x \in A_j \subset \bigcup A_i$.

   (b) Poiché ogni successione convergente in uno spazio topologico di Hausdorff ammette un unico limite, basterà trovare una successione come richiesto dal punto (e) per concludere che $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è uno spazio di Hausdorff. Alternativamente, si può notare che $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ non è un aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, perciò il singoletto $\{1\}$ non è chiuso e dunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non può essere uno spazio di Hausdorff. Ancora, si può verificare che ogni aperto contenente 1 deve contenere anche -1, perciò per definizione $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è uno spazio di Hausdorff.

   (c) Ogni sottoclasse finita del ricoprimento aperto $\{[-n, n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ricopre $\mathbb{R}$, dunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è compatto.

   (d) Gli aperti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\{0\}$ sono non vuoti, disgiunti e ricoprono $\mathbb{R}$. Perciò $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è sconnesso.

   (e) La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $x_n = (-1)^n$ converge a 1 e -1. Infatti per ogni $A \in \mathcal{T}$ contenente 1 si ha che $x_n \in A$ per ogni $n \geq 0$, dato che anche -1 deve appartenere ad A. Specularmente, per ogni $B \in \mathcal{T}$ contenente -1 si ha che $x_n \in B$ per ogni $n \geq 0$.

2. Indichiamo con p il punto di Y che è immagine dei punti di F.

   (a) L'espressione di D è simmetrica in x e x'. Notiamo che se $x' \in F$, cioè se $d(x', F) = 0$, allora $D(h(x), h(x')) = d(x, F)$. Ne segue in particolare che quella di D è una buona definizione. Se $h(x) = h(x')$, o $x = x'$ o $x, x' \in F$. Nel primo caso $D(h(x), h(x')) = d(x, x') = 0$, nel secondo $D(h(x), h(x')) = d(x, F) + d(x', F) = 0$. Se viceversa $D(h(x), h(x')) = 0$, allora o $d(x, x') = 0$ oppure $d(x, F) = d(x', F) = 0$, quindi $x, x' \in F$, cioè $h(x) = h(x')$. Per la proprietà triangolare ragioniamo così. Siano $h(x)$, $h(y)$, $h(z)$ punti di Y. Se $D(h(x), h(z)) = d(x, z)$ e $D(h(z), h(y)) = d(z, y)$, allora $D(h(x), h(z)) + D(h(z), h(y)) \geq d(x, y) \geq D(h(x), h(y))$. Se $D(h(x), h(z)) = d(x, z)$ e $D(h(z), h(y)) = d(z, F) + d(y, F)$, allora $D(h(x), h(z)) + D(h(z), h(y) \geq d(x, F) + d(y, F) \geq D(h(x), h(y))$. Se infine $D(h(x), h(z)) = d(z, F) + d(x, F)$ e $D(h(z), h(y)) = d(z, F) + d(y, F)$, allora $D(h(x), h(z)) + D(h(z), h(y) = d(x, F) + d(y, F) + 2d(z, F) \geq D(h(x), h(y))$.

   (b) Sia U aperto nella topologia quoziente di Y. Allora $h^{-1}(U)$ è aperto in X, quindi la distanza tra il suo complementare e F è strettamente positiva, diciamo maggiore di $\varepsilon > 0$, dato che F è compatto. Dunque $\{x \in X : d(x, F) < \varepsilon\} \subset h^{-1}(U)$, quindi la palla di centro p e raggio ε è contenuta in U. Se $x \notin F$, per ε sufficientemente piccolo la palla $B(x, \varepsilon)$ è contenuta in $h^{-1}(U)$. Inoltre, se $\varepsilon \leq d(x, F)$, $h(B(x, \varepsilon))$ è la palla di centro $h(x)$ e raggio ε, che è quindi contenuta in U. Questo mostra che U è aperto nella topologia metrica di Y. Viceversa supponiamo V aperto nella topologia metrica, e quindi supponiamo che per ogni $y \in V$ ci sia una palla di centro y e raggio ε_y contenuta in V. Possiamo anche supporre che se $y = h(x)$ con $x \notin F$ allora $\varepsilon_y < d(x, F)$. Sotto queste ipotesi

   $$h^{-1}(B(p, \varepsilon_p)) = \{x \in X : d(x, F) < \varepsilon_p\} \quad \text{e} \quad h^{-1}(B(y, \varepsilon_y)) = B(x, \varepsilon_y) \text{ se } y \neq p$$

   In ogni caso $h^{-1}(B(y, \varepsilon_y))$ è un aperto in X, e quindi $h^{-1}(V)$ è aperto, cioè V è aperto nella topologia quoziente di Y.

(c) Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy in Y. Scriviamo $y_n = h(x_n)$ per qualche $x_n \in X$. Se y_n non converge a p vi è un $\varepsilon > 0$ tale che esistono n arbitrariamente grandi con $D(y_n, p) \geq \varepsilon$, cioè con $d(x_n, F) \geq \varepsilon$. Dato che $\{y_n\}$ è di Cauchy esiste n_0 tale che, se $n, m \geq n_0$, allora $D(y_n, y_m) < \varepsilon/2$. Come si è osservato vi è un $m_0 \geq n_0$ tale che $d(x_{m_0}, F) \geq \varepsilon$. Ma allora $d(x_n, F) = D(y_n, p) \geq D(y_{m_0}, p) - D(y_n, y_{m_0}) > \varepsilon/2$ per $n \geq n_0$. Ne segue che $D(y_n, y_m) = d(x_n, x_m)$ per $n, m \geq n_0$. Di conseguenza anche $\{x_n\}$ è di Cauchy, quindi converge per ipotesi. Dato che h è continua anche $\{y_n\} = \{h(x_n)\}$ converge.

3. (a) Se $f_n \to f$, dove $f_n \in X$, allora

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \lim_{n\to\infty} |x - y| = |x - y|$$
$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \geq \lim_{n\to\infty}(3 - 3t^2) = 3 - 3t^2$$

(b) Se $\| \ \|$ è la norma L_∞ e $d(f, g) = \|f - g\|$ è la metrica della convergenza uniforme,

$$\begin{aligned}|\varphi(f) - \varphi(g)| &\leq \int_{-1}^{1} |f(t)^2 - g(t)^2| dt + 2\int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq \|f + g\| \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| dt + 2d(f, g) \\ &\leq 2(2\|f\| + \varepsilon) d(f, g) + 2d(f, g)\end{aligned}$$

quando $\|f - g\| \leq \varepsilon$.

(c) La funzione h che vale costantemente 3 appartiene a X. D'altra parte se $f \in X$ e $f(x) > 5$ per qualche $x \in [-1, 1]$ allora per la condizione di Lipschitzianità $f(t) > 3$ per ogni $t \in [-1, 1]$. Ne segue che $\varphi(f) > \varphi(h)$ e dunque che possiamo limitarci a cercare il minimo in $X_0 = \{g \in X : g(x) \leq 5 \ \forall x \in [-1, 1]\}$. Ora X_0 è un sottinsieme chiuso e equicontinuo dell'insieme delle funzioni continue dal compatto $[-1, 1]$ al compatto $[0, 5]$, quindi X_0 è compatto per il teorema di Ascoli. Ne segue l'esistenza di un minimo su X_0 della funzione continua φ.

4. (a) Una matrice associata alla conica Γ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_1 è 3 e il punto $[1 : 2 : 0]$ appartiene a Γ, dunque Γ è una conica proiettiva generale dotata di punti reali.
La sottomatrice $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo, dunque Γ_0 è un'iperbole.
Si noti che i punti all'infinito, ottenuti intersecando Γ con la retta all'infinito $x_0 = 0$, sono $[0 : 1 : -1]$ e $[0 : 2 : -1]$. Inoltre il centro di Γ è $[1 : -2 : 1]$, soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}.$$

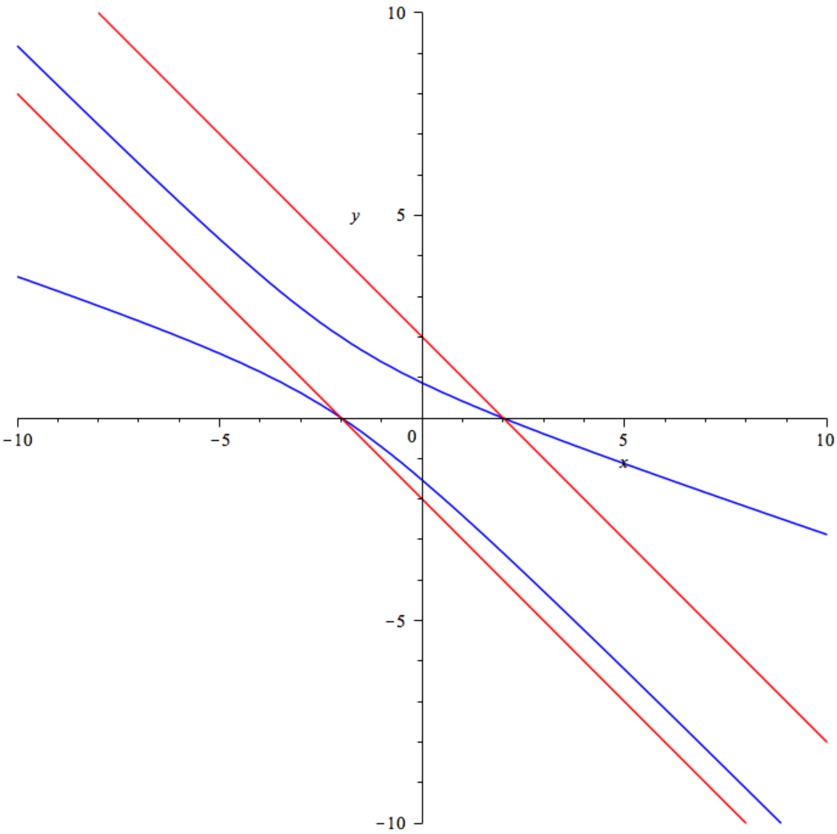
Una matrice associata alla conica Δ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A_2 sono 0, -2 e 3, dunque Δ è una conica proiettiva degenere.
La sottomatrice $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo, dunque Δ_0 è una coppia di rette distinte parallele.
Si poteva altrimenti facilmente verificare che l'equazione di Δ coincide con

$$(2x_0 + x_1 + x_2)(2x_0 - x_1 - x_2) = 0.$$

Nel disegno, dove si è posto $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$, Γ_0 è disegnata in blu e Δ_0 in rosso.



(b) Il sistema

$$\begin{cases} 4x_0^2 - x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0 \\ 4x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

dà come soluzioni $[0 : 1 : -1]$, $[1 : 2 : 0]$ e $[1 : -2 : 0]$.

(c) Tutte le coniche in $\mathbb{P}^2$ sono connesse. Allora $\Gamma \cup \Delta$ è connesso, poiché dal punto precedente si ha che $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$. Invece $\Gamma \setminus (\Gamma \cap \Delta)$ è una conica generale privata dei tre punti trovati nel punto precedente; perciò ha tre componenti connesse.