Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 13 settembre 2016

1. Siano X e Y spazi topologici e sia $p : X \times Y \to X$ la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   (a) p è aperta;

   (b) p è chiusa;

   (c) X è omeomorfo al quoziente $\frac{X \times Y}{\sim}$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza

   $$(x, y) \sim (x', y') \text{ se e solo se } x = x'$$

2. Per ogni $a > 0$ sia $C(a)$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da

   $$C(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = a^2\}.$$

   Sia inoltre $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y \geq 0\}$. Per ogni sottoinsieme non vuoto S di $\mathbb{Z}$ si considerino lo spazio

   $$X_S = \bigcup_{m \in \mathbb{S}} C(e^m),$$

   fornito della topologia indotta da quella usuale su $\mathbb{R}^2$, e lo spazio

   $$Y_S = X_S / H_S$$

   fornito della topologia quoziente, ove $H_S = Q \cap X_S$.
   Motivando le risposte, dire per quali sottoinsiemi non vuoti S di $\mathbb{Z}$ si ha che:

   (a) X_S è limitato;

   (b) X_S è compatto.

   Verificare inoltre che per ogni $S \subset \mathbb{Z}$ non vuoto si ha che:

   (c) Y_S non è uno spazio di Hausdorff;

   (d) Y_S è connesso per archi.

3. Sia $X = C(\mathbb{R}, [-1, 1])$ l'insieme delle funzioni continue dalla retta reale all'intervallo chiuso $[-1, 1]$. Per ogni intero positivo n e ogni coppia f, g di elementi di X poniamo

   $$\eta_n(f, g) = \sup_{t \in [-n, n]} |f(t) - g(t)|$$

   (a) Mostrare che η_n soddisfa la disuguaglianza triangolare, cioè che $\eta_n(f, g) \leq \eta_n(f, h) + \eta_n(h, g)$ per ogni $f, g, h \in X$.

   Per ogni $f, g \in X$ poniamo

   $$\eta(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta_n(f, g)$$

   Sia inoltre $d(f, g) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|$ la metrica uniforme su X.

   (b) Mostrare che η è una metrica su X.

(c) Mostrare che l'applicazione identità $i : (X, d) \to (X, \eta)$ è continua ma non è un omeomorfismo.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ su campo reale le quadriche

$$\Gamma = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0^2 - x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0\}$$
$$\Delta = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_0x_1 + 2x_0x_2 = 0\}$$

e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0 \neq 0\}$, le quadriche

$$\Gamma_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0^2 - x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0,\, x_0 \neq 0\}$$
$$\Delta_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_0x_1 + 2x_0x_2 =,\, x_0 \neq 0\}$$

(a) Classificare Γ e Δ dal punto di vista proiettivo e classificare Γ_0 e Δ_0 dal punto di vista affine.

(b) Verificare che $\Gamma \cap \Delta$ contiene esattamente tre punti p_1, p_2 e p_3.

(c) Determinare le equazioni di una quadrica Θ in $\mathbb{P}^2$, distinta da Γ e da Δ, passante per p_1, p_2 e p_3.

Soluzioni

1. (a) Vero. Qualsiasi aperto U di $X \times Y$ è della forma $U = \bigcup_i U_i$, dove $U_i = A_i \times B_i$ con A_i aperto in X e B_i aperto in Y. È chiaro che $p(U_i) = A_i$. Quindi $p(U) = \bigcup_i p(U_i) = \bigcup_i A_i$ è aperto in X.

(b) Falso. Sia ad esempio $X = Y = \mathbb{R}$. L'insieme $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1, x \geq 0\}$ è chiuso in $X \times Y$, ma $p(F) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ non è chiuso in $X = \mathbb{R}$.

(c) Vero. Poniamo $Z = \frac{X \times Y}{\sim}$ e indichiamo con $\pi : X \times Y \to Z$ la proiezione naturale. Notiamo che, per ogni scelta di $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $p(x, y) = p(x', y')$ se e solo se $\pi(x, y) = \pi(x', y')$. Quindi c'è una applicazione biunivoca $g : Z \to X$ tale che $p = g \circ \pi$. Per la proprietà universale dei quozienti, g è continua. Dato che p è aperta la topologia di X è la topologia quoziente di quella di $X \times Y$. Dunque anche l'inversa di g è continua, sempre per la proprietà universale dei quozienti.

2. (a) X_S è limitato se e solo se esiste un disco $B((0, 0), r)$ contenente X_S. Questo si verifica solo se esiste $r > 0$ tale che $m < \log r$ per ogni $m \in S$, cioè se S è limitato superiormente.

(b) X_S è compatto se e solo se è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$. Le condizioni per la limitatezza sono state date al punto (a). Per la chiusura, si noti che se S è limitato inferiormente allora $\mathbb{R}^2 \smallsetminus X_S$ è composto dall'unione del disco aperto $B((0, 0), e^{\min S})$ con corone circolari aperte ed eventualmente col complementare in $\mathbb{R}^2$ di un disco chiuso, dunque $\mathbb{R}^2 \smallsetminus X_S$ è aperto in $\mathbb{R}^2$, cioè X_S è chiuso. Viceversa, se S non è limitato inferiormente allora esiste una successione $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S tendente a $-\infty$. La successione $((e^{m_k}, 0))_{k\in\mathbb{N}}$ è contenuta in X_S e sta tendendo a $(0, 0) \notin X_S$, perciò X_S non è chiuso. Questo mostra che X_S è chiuso se e solo se S è limitato inferiormente. In conclusione, X_S è compatto se e solo se S è limitato (cioè finito).

(c) Siano $\pi : X_S \to Y_S$ la proiezione (continua) e $\{y\} = \pi(H_S)$. Sia $m \in S$. Se per assurdo $z = \pi(0, e^m)$ e y fossero separati, esisterebbe A aperto di Y_S contenente z ma non y. Poiché $\pi^{-1}(A)$ è un aperto di X_S contenente $(0, e^m)$, esiste $\delta > 0$ tale che $B((0, e^m), \delta) \cap C(e^m) \subset \pi^{-1}(A)$. Poiché esiste $p \in B((0, e^m), \delta) \cap H_S$, si ha

$$y = \pi(p) \in \pi(B((0, e^m), \delta) \cap C(e^m)) \subset A$$

il che porta a contraddizione. Y_S dunque non è uno spazio di Hausdorff.

(d) Nelle notazioni del punto (c), basterà verificare che per ogni $y_1 \in Y_S$ esiste un arco in Y_S che congiunge y con y_1. Sia x_1 l'elemento di X_S tale che $\pi(x_1) = y_1$. Esso apparterrà a $C(e^n)$ per un certo $n \in S$. L'insieme $C(e^n)$ è connesso per archi, dunque esiste un arco α in $C(e^n)$ tra $x = (e^n, 0) \in C(e^n) \cap H_S$ e x_1. Dunque $\pi \circ \alpha$ è un arco in Y_S tra $\pi(x) = y$ e $\pi(x_1) = y_1$.

3. (a) $\eta_n(f, g)$ non è altro che la distanza uniforme tra le restrizioni di f e g all'intervallo $[-n, n]$. Quindi per η_n vale la disuguaglianza triangolare.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta_n(f, g)$ converge perché il suo termine n-esimo è maggiorato da $\frac{1}{2^{n-1}}$. Inoltre la serie è a termini non negativi, quindi $\eta(f, g) \geq 0$. Se $f \neq g$ esiste t tale che $f(t) \neq g(t)$. Quindi $\eta_n(f, g) > 0$ per qualsiasi intero $n > |t|$. Ne segue che $\eta(f, g) > 0$. Inoltre $\eta(f, g) = \eta(g, f)$ per ogni f, g dato che $\eta_n(f, g) = \eta_n(g, f)$ per ogni n. Infine

$$\eta(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta_n(f, g) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\eta_n(f, h) + \eta_n(h, g)) = \eta(f, h) + \eta(h, g)$$

(c) $\eta_n(f, g) \leq d(f, g)$, quindi

$$\eta(f, g) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(f, g) = d(f, g)$$

Quindi i è continua in quanto Lipschitziana. Per ogni intero positivo k sia ora f_k la funzione definita come segue:

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \leq k \text{ oppure } t \geq k+1 \\ 2(t-k) \text{ se } k \leq t \leq k+1/2 \\ 2 - 2(t-k) \text{ se } k+1/2 \leq t \leq k+1 \end{cases}$$

Si vede immediatamente che f_k è continua per ogni k, che $d(f_k, 0) = 1$ e che

$$\eta_n(f_k, 0) = \begin{cases} 1 \text{ se } k < n \\ 0 \text{ se } k \geq n \end{cases}$$

Ne segue che

$$\eta(f_k, 0) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$$

e quindi che la successione f_k converge a 0 in (X, η) ma non in (X, d).

4. (a) Una matrice associata alla conica Γ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_1 è 2 con segnatura proiettiva $(1,1)$, dunque Γ è una conica proiettiva degenere.
La sottomatrice $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo, dunque Γ_0 è una parabola degenere.
Si poteva altrimenti facilmente verificare che l'equazione di Γ coincide con

$$x_0(x_0 - x_1 + 2x_2) = 0$$

e che quindi Γ è l'unione delle rette di equazione $x_0 = 0$ e $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$. Si noti che dunque Γ_0 ha come supporto un'unica retta in $\mathbb{R}^2$.
Una matrice associata alla conica Δ è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di A_2 è 3 e il punto $[1:0:0]$ appartiene a Δ, dunque Δ è una conica proiettiva generale dotata di punti reali.
La sottomatrice $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo, dunque Δ_0 è una parabola.

(b) Il sistema

$$\begin{cases} x_0^2 - x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \\ 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_0x_1 + 2x_0x_2 = 0 \end{cases}$$

dà come soluzioni $p_1 = [0:1:-2]$, $p_2 = [1:1:0]$ e $p_3 = [-9:1:10]$.

(c) Una possibile quadrica Θ è quella degenere costituita dall'unione della retta passante per p_1 e per p_2 con una retta passante per p_3. La prima ha equazione

$$\text{rango} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ossia

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2x_0 - 2x_1 - x_2.$$

Una retta passante per p_3 è ad esempio quella di equazione $x_0 + 9x_1 = 0$. Quindi Θ ha equazione

$$(2x_0 - 2x_1 - x_2)(x_0 + 9x_1) = 0.$$