Corso di Geometria 1 – a.a. 2015-2016

Prova scritta del 26 settembre 2016

1. Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \ : \ (\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q}) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$.

   (b) Dare un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che sia un chiuso nella topologia usuale su $\mathbb{R}^2$ e un aperto nella topologia $\mathcal{T}$.

   (c) Dire se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico connesso, motivando la risposta.

   (d) Dire se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico di Hausdorff, motivando la risposta.

   (e) Verificare che la successione $a_n = (0, 2n+1)$ di punti di $\mathbb{R}^2$ converge per $n \to \infty$ a $(0,0)$, rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

2. Sia X uno spazio topologico. Sia Y il quoziente

$$\frac{X \times X}{\sim}$$

   dove $(x', y') \sim (x, y)$ se e solo se $(x', y') = (x, y)$ oppure $(x', y') = (y, x)$. In altre parole, Y è ottenuto da $X \times X$ identificando tra loro i punti (x, y) e (y, x) per ogni $x, y \in X$.

   (a) Mostrare che Y è connesso se e solo se lo è X.

   (b) Mostrare che Y è compatto se e solo se lo è X.

   (c) Mostrare che Y è di Hausdorff se e solo se lo è X.

3. Consideriamo gli insiemi di funzioni $A = C(\mathbb{R}, [-1, 1])$ e $B = C(\mathbb{R},]-1, 1[)$, entrambi muniti della distanza

$$d(f, g) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|$$

   (a) A è completo?

   (b) A è totalmente limitato?

   (c) B è completo?

   (d) B è totalmente limitato?

   Giustificare le risposte.

4. Si considerino in $\mathbb{P}^2$ su campo reale i punti $p = [-2 : 4 : -2]$ e $q = [0 : 2 : 3]$ e la quadrica

$$\Gamma = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 - 8x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0\right\}$$

   e in $\mathbb{R}^2$, identificato con $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0 \neq 0\right\}$, la quadrica

$$\Gamma_0 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \,|\, 3x_0^2 + 2x_1^2 + x_2^2 - 8x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0, \ x_0 \neq 0\right\}$$

   (a) Trovare un'equazione per la retta $r \subset \mathbb{P}^2$ passante per p e q.

   (b) Classificare Γ dal punto di vista proiettivo e Γ_0 dal punto di vista affine.

(c) Trovare il centro c di Γ, in coordinate proiettive.

(d) Verificare che $p \in \Gamma \cap r$ e che $q \notin \Gamma \cap r$.

Soluzioni

1. Denotiamo con X l'insieme $(\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q})$. In questo modo,

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \ : \ X \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) L'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}$. Anche $\mathbb{R}^2$ appartiene a $\mathcal{T}$, poiché $X \subset \mathbb{R}^2$. Se $A, B \in \mathcal{T}$ allora $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$, dunque $X \subseteq A \cap B$. Se $\{A_i\}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{T}$ allora $X \subseteq A_i$ per ogni i, perciò $X \subseteq \bigcup A_i$.

(b) Per esempio, il sottoinsieme $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ è un chiuso di $\mathbb{R}^2$ nella topologia euclidea, ma è un aperto di $\mathbb{R}^2$ nella topologia $\mathcal{T}$, poiché contiene X.

(c) Si noti che se A e B sono due aperti non vuoti di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ allora non sono disgiunti, poiché entrambi contengono X. Quindi è impossibile trovare due aperti non vuoti disgiunti la cui unione sia $\mathbb{R}^2$: lo spazio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è connesso.

(d) Per lo stesso motivo del punto (c), dati due punti distinti $p, q \in \mathbb{R}^2$ è impossibile separarli con aperti disgiunti: lo spazio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff.

(e) Per definizione, a_n converge a $(0,0)$ se e solo se per ogni aperto U di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ contenente $(0,0)$ esiste $m_U \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq m_U$. Per verificare ciò, si noti che $a_n = (0, 2n+1)$ appartiene a X per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che ogni aperto di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ contiene $(0,0)$. Perciò basta porre $m_U = 0$ per ogni $U \in \mathcal{T}$: è infatti vero che fissato $U \in \mathcal{T}$ si ha che $a_n \in U$ per ogni $n \geq 0$, poiché $a_n \in X \subseteq U$.

2. Sia $f : X \times X \to Y$ l'applicazione quoziente. Questa applicazione è continua e anche aperta. Infatti se A e B sono aperti in X, allora $f^{-1}(f(A \times B)) = A \times B \cup B \times A$ è aperto. Se $U = \bigcup_i A_i \times B_i$ è un aperto generale in $X \times X$, allora $f^{-1}(f(U)) = \bigcup_i f^{-1}(f(A_i \times B_i))$ è aperto in quanto unione di aperti. Dunque $f(U)$ è aperto in Y.

(a) Se X è connesso anche $X \times X$ è connesso. Lo spazio Y è immagine di $X \times X$ tramite f, che è continua. Quindi anche Y è connesso.
Se X non è connesso è unione di aperti disgiunti non vuoti A e B. Quindi $X \times X$ è unione degli aperti non vuoti e a due a due disgiunti $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ e $B \times B$, e Y è unione degli aperti non vuoti e a due a due disgiunti $f(A \times A)$, $f(A \times B) = f(B \times A)$ e $f(B \times B)$. Dunque Y non è connesso.

(b) Se X è compatto anche $X \times X$ è compatto. Lo spazio Y è immagine di $X \times X$ tramite f, che è continua. Quindi anche Y è compatto.
Viceversa sia $X = \bigcup_i A_i$, dove gli A_i sono aperti. Ne segue che $X \times X = \bigcup_{i,j} A_i \times A_j$ e quindi che $Y = \bigcup_{i,j} f(A_i \times A_j)$. Se Y è compatto ci sono indici $i_1, \ldots, i_n$ e $j_1, \ldots, j_n$ tali che $Y = \bigcup_{h=1}^n f(A_{i_h} \times A_{j_h})$. Duque, dato $x \in X$, esiste h tale che $f(x,x) \in A_{i_h} \times A_{j_h}$ e quindi tale che $x \in A_{i_h} \cap A_{j_h}$. Se ne conclude che $X = \bigcup_{i=1}^n A_{i_h}$.

(c) Supponiamo X di Hausdorff. Ne segue che lo è anche $X \times X$. Sia $j : X \times X \to X \times X$ l'applicazione $(x,y) \mapsto (y,x)$; è un omeomorfismo è j^2 è l'identità. Due punti $p = f(x,y)$ e $q = f(z,w)$ di Y sono distinti se e solo se (z,w) è diverso sia da (x,y) che da $(y,x) =$

$j(x,y)$. In questo caso in $X \times X$ ci sono quindi aperti U, V e W tali che $(z,w) \in U$, $(x,y) \in V$, $(y,x) \in W$, $U \cap V = \emptyset$ e $U \cap W = \emptyset$. Rimpiazzando eventualmente V con $V \cap j(W)$ e W con $W \cap j(V)$ possiamo supporre che $V = j(W)$. Allora $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ e $f(U)$, $f(V)$ sono aperti contenenti rispettivamente p e q. Dunque Y è di Hausdorff.
Supponiamo viceversa che Y sia di Hausdorff. Siano x, y punti distinti di X. Allora $f(x,x) \neq f(x,y)$ e dunque ci sono aperti U, V in Y tali che $f(x,x) \in U$, $f(x,y) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Gli aperti $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono disgiunti e contengono rispettivamente (x,x) e (x,y). Quindi ci sono aperti A, B, C, D in X tali che $(x,x) \in A \times B \subset f^{-1}(U)$ e $(x,y) \in C \times D \subset f^{-1}(V)$. Ne segue che B e D sono intorni disgiunti di x e y.

3. (a) In generale $C(X,Y)$ è completo se e solo se lo è Y. Quindi A è completo e B no.

   (b) A non è totalmente limitato perché non è compatto, pur essendo completo. Consideriamo infatti la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni definita da

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leq n-1 \\ t-n & \text{se } n-1 \leq t \leq n+1 \\ 1 & \text{se } t \geq n+1 \end{cases}$$

   e osserviamo che $d(f_n, f_m) \geq 1$ se $n \neq m$. Quindi $\{f_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy e a maggior ragione non ha sottosuccessioni convergenti.

   (c) Vedi il punto (a).

   (d) Supponiamo B totalmente limitato. Dato $\varepsilon > 0$ esistono allora funzioni $f_1, \ldots, f_n \in B$ tali che $B = B(f_1, \varepsilon/2) \cup \cdots \cup B(f_n, \varepsilon/2)$. Se $f \in A$ poniamo $g = (1 - \varepsilon/2)f$. Allora $g \in B$ e $d(f,g) \leq \varepsilon/2$. Dunque esiste un indice i tale che $g \in B(f_i, \varepsilon/2)$. Ne segue che $d(f, f_i) < \varepsilon$. Quindi A è unione di un numero finito di palle di raggio ε per ogni $\varepsilon > 0$, in contraddizione con il punto (b). La conclusione è che B non può essere totalmente limitato.

Soluzione alternativa diretta dei punti (b) e (d). Scegliamo $\varepsilon < 1$. Siano $f_1, \ldots, f_n$ elementi di B. Per ogni $h = 1, \ldots, n$ esiste $a_h \in]-1, 1[$ tale che $|a_h - f_h(h)| > \varepsilon$. Sia f la funzione definita nel modo seguente:

$$f(t) = \begin{cases} a_1 & \text{se } t \leq 1 \\ (a_{h+1} - a_h)(t-h) + a_h & \text{se } h \leq t \leq h+1 \text{ per } h = 1, \ldots, n-1 \\ a_n & \text{se } t \geq n \end{cases}$$

Allora $f \in B$ ma $f \notin B(f_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(f_n, \varepsilon)$ (sia che si interpreti $B(f_h, \varepsilon)$ come palla in A sia che la si interpreti come palla in B).

4. (a) Un'equazione per trovare r si può trovare imponendo che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

   sia 2, il che equivale a porre

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Il calcolo del determinante porta all'equazione

$$8x_0 + 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Equivalentemente, traducendo la richiesta nel contesto affine, si poteva cercare l'equazione in $\mathbb{R}^2$ della retta passante per il punto $(\frac{4}{-2}, \frac{-2}{-2}) = (-2, 1)$ con punto improprio q, cioè con pendenza $\frac{3}{2}$. Tale equazione è infatti

$$y = \frac{3}{2}x + 4.$$

(b) Una matrice associata alla conica Γ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segnatura proiettiva di A è $(2, 1)$, dunque Γ è una conica proiettiva generale dotata di punti reali.

La sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante positivo, dunque Γ_0 è un'ellisse.

(c) Le coordinate proiettive del centro di Γ si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

Esso ha soluzione $[1 : -4 : 8]$.

(d) Per costruzione, $p \in r$ e $q \in r$. Di conseguenza, basta verificare che $p \in \Gamma$ e $q \notin \Gamma$. Il punto p appartiene a Γ se e solo se sostituendo le coordinate proiettive di p nell'equazione di Γ si ottiene un'identità. Per semplificare i calcoli, moltiplichiamo le coordinate di p del testo per $-1/2$, ottenendo $p = [1 : -2 : 1]$. Ora:

$$3(1)^2 + 2(-2)^2 + (1)^2 - 8(1)(1) + 2(-2)(1) = 0.$$

Analogamente, q appartiene a Γ se e solo se sostituendo le coordinate proiettive di q nell'equazione di Γ non si ottiene un'identità. In effetti,

$$3(0)^2 + 2(2)^2 + (3)^2 - 8(2)(3) + 2(0)(3) \neq 0.$$