Corso di Teoria dei Gruppi - a.a. 2009-2010

Esercizi 4

1. Sia $\zeta = (-1 + \sqrt{3}i)/2$. Mostrare che $\mathbb{Q}[\zeta]$ è un campo di spezzamento di $X^4 + X^2 + 1$ su $\mathbb{Q}$.

2. Sia K un campo contenente tutte le radici n-esime dell'unità. Poniamo $E = K(t)$, dove t è trascendente su K. Mostrare che il polinomio $X^n - t$ è irriducibile in $E[X]$. Sia s una radice n-esima di t. Mostrare che $E[s]$ è un campo di spezzamento di $X^n - t$ e che s è trascendente su K.

3. Sia E un campo di spezzamento per un polinomio di grado d a coefficienti in K. Mostrare che $[E : K]$ divide $d!$.

4. Mostrare che il solo automorfismo di $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ è l'identità

5. Per ognuno dei polinomi $X^4 - 3X + 2$, $X^4 + 3X + 2$, $X^4 - 3$, trovare un campo di spezzamento K su $\mathbb{Q}$, calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare $\alpha \in K$ tale che $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

6. Sia K un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di $P(X) = X^4 - 7$. Calcolare il grado di K su $\mathbb{Q}$ e trovare tutti i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e K.

7. Trovare un campo di spezzamento per $X^3 - 5$ su $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.