Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2006-2007
Prova scritta del 26.2.2007

1. Sia Y uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Siano $\alpha_1 \colon X_1 \to Y$ e $\alpha_2 \colon X_2 \to Y$ rivestimenti. Sia $Z \subset X_1 \times X_2$ il sottospazio $\{(x, y) : \alpha_1(x) = \alpha_2(y)\}$. Indichiamo con β l'applicazione $Z \to Y$ definita da $\beta(x, y) = \alpha_1(x) = \alpha_2(y)$, e con p_1 e p_2 le proiezioni da Z su X_1 e X_2.
   (a) Mostrare che β, p_1 e p_2 sono rivestimenti.
   (b) Mostrare che, se α_1 ha grado finito h e α_2 ha grado finito k, allora β ha grado hk.
   (c) Mostrare con un esempio che Z non è necessariamente connesso, anche quando X_1 e X_2 sono connessi.
   (d) Supponiamo che α_1 e α_2 abbiano grado finito e che X_1 e X_2 siano connessi. Supponiamo anche che i gradi di α_1 e α_2 siano primi fra loro. Mostrare che Z è connesso.

2. (a) Sia $X = S \cup P \subset \mathbb{R}^4$, dove S è la sfera unitaria $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum x_i^2 = 1\}$ e P è il piano $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = x_4 = 0\}$. Calcolare i gruppi di omologia intera e il gruppo fondamentale di X.
   (b) Costruire uno spazio topologico Y tale che $H_q(Y) \cong \mathbb{Z}$ se $0 \leq q \leq 3$ e $H_q(Y) \cong \{0\}$ se $q > 3$.

Soluzioni

1. (a) Sia y un punto di Y, e siano U e U' intorni aperti di y uniformemente rivestiti da α_1 e α_2. Rimpiazzando U e U' con la loro intersezione, possiamo supporre che siano uguali. Allora
$$\alpha_1^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i \,, \quad \alpha_2^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j \,,$$
dove U_i (risp., V_j) è omeomorfo a U via α_1 (risp., α_2). Poniamo $W_{i,j} = Z \cap U_i \times V_j$. Allora $W_{i,j}$ è aperto in Z e
$$\beta^{-1}(U) = \coprod_{i \in I, j \in J} W_{i,j} \,.$$
Inoltre $W_{i,j} \to U_i$ è un omeomorfismo. Infatti la sua inversa (continua) è $y \mapsto (\gamma_i(y), \eta_j(y))$, dove γ_i e η_j sono inverse di $U_i \to U$ e $V_j \to U$. Infine, sia x un punto di X_1. Poniamo $y = \alpha_1(x)$. Il punto x è contenuto in U_i, per qualche i. Allora U_i è uniformemente rivestito da p_1; infatti
$$p_1^{-1}(U_i) = \coprod_j W_{i,j} \,.$$
Si ragiona in modo analogo per p_2.
   (b) Con le notazioni del punto precedente, h è la cardinalità di I, e k quella di J, mentre il grado di β è il numero delle possibili coppie (i, j), cioè hk.

(c) Consideriamo il caso in cui $X_2 = X_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$ e α_1 ha grado > 1. Poniamo $X = X_1$ e $\alpha = \alpha_1$. Poniamo poi $A = \{(x, x) : x \in X\}$ e $B = \{(x, x') \in Z : x \neq x'\}$. È chiaro che A non è vuoto, che A e B sono disgiunti, e che $A \cup B = Z$; inoltre B non è vuoto perchè α ha grado > 1. Mostriamo che A e B sono aperti. Sia (x, x') un punto di Z, sia U un intorno uniformemente rivestito di $\alpha(x) = \alpha(x')$, e scriviamo $\alpha^{-1}(U) = \coprod U_i$, dove gli U_i sono omeomorfi a U via α. Esistono, unici, i e j tali che $x \in U_i$ e $x' \in U_j$. Allora $Z \cap U_i \times U_j$ è contenuto in A se $x = x'$ e in B se $x \neq x'$.

Altra soluzione. Scegliamo $X_1 = X_2 = S^2$, $Y = \mathbb{RP}^2$, e sia $\alpha_1 = \alpha_2 \colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ il rivestimento universale. Z è un rivestimento di X_1 di grado 2, perchè $Z \to Y$ ha grado 4. Quindi Z non è connesso perchè X_1 è semplicemente connesso.

(d) Mostreremo che, dati punti $a, b \in Z$, c'è un cammino in Z che li congiunge. Sia γ un cammino in Y da $\beta(a)$ a $\beta(b)$, sia η un suo sollevamento a Z con punto iniziale in a, e sia a' il punto finale di η, di modo che $\beta(a') = \beta(b)$. Basterà mostrare che si possono congiungere con un cammino a' e b; in altre parole, si potrà supporre che $\beta(a) = \beta(b)$. Scriviamo $a = (x_1, x_2)$ e $b = (\xi_1, \xi_2)$. Basterà mostrare che c'è un cammino che congiunge (x_1, x_2) a (x_1, ξ_2). Infatti, scambiando i ruoli di X_1 e X_2, questo mostra che esiste anche un cammino da (x_1, ξ_2) e (ξ_1, ξ_2). Poniamo $y_0 = \beta(x_1) = \beta(x_2) = \beta(\xi_1) = \beta(\xi_2)$, $G = \pi_1(Y, y_0)$, $H = \alpha_{1*}\pi_1(X_1, x_1)$ e $K = \alpha_{2*}\pi_1(X_2, \xi_2)$. Se poniamo $h = [G : H]$ e $k = [G : K]$, h è il grado di α_1 e k quello di α_2. Ora

$$[G : H \cap K] = [G : H][H : H \cap K] = h[H : H \cap K] = [G : K][K : H \cap K] = k[K : H \cap K]\,.$$

Visto che h e k sono primi fra loro ne segue che $h \Big| [K : H \cap K]$ e $k \Big| [H : H \cap K]$. D'altra parte si verifica immediatamente che l'applicazione $H/(H \cap K) \to G/K$ data da $h(H \cap K) \mapsto hK$ è ben definita e iniettiva, e quindi $[H : H \cap K] \leq k$. Si conclude che $[H : H \cap K] = k$, che $[K : H \cap K] = h$, e che $H/(H \cap K) \to G/K$ è biunivoca. In particolare, $H \to G/K$ è suriettiva. Visto il significato di G, H e K, questo si traduce nella seguente affermazione: dato un cammino γ in Y con estremi in y_0, esistono un cammino η in X_1 con estremi in x_1 e un cammino σ in X_2 con estremi in ξ_2 tali che $\alpha_1 \circ \eta$ sia omotopo con estremi fissi a $\gamma * (\alpha_2 \circ \sigma)$. Se scegliamo come γ un cammino della forma $\alpha_2 \circ \rho$, dove ρ è un cammino in X_2 che congiunge x_2 a ξ_2, questo si può riscrivere come $\alpha_1 \circ \eta \sim \alpha_2 \circ (\rho * \sigma)$. Sia ora τ il sollevamento a X_1 di $\alpha_2 \circ (\rho * \sigma)$ con estremo iniziale in x_1. Visto che $\alpha_1 \circ \tau \sim \alpha_1 \circ \eta$, anche τ è un cammino chiuso. Quindi $t \mapsto (\tau(t), \rho * \sigma(t))$ è un cammino in Z con estremo iniziale in (x_1, x_2) ed estremo finale in (x_1, ξ_2).

2. (a) Poniamo $Z = S \cup Q$, dove $Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = x_4 = 0, \sum x_i^2 \leq 1\}$. Z è un retratto di deformazione di X, quindi ha gli stessi gruppi di omologia e fondamentale di X. Una decomposizione cellulare di Z è la seguente: $Z^0 = \{p\}$, dove $p = (1, 0, 0, 0)$, $Z^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = x_4 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $Z^2 = Z \cap \{x_4 = 0\}$. Z^1 è ottenuto attaccando una 1-cella ℓ a Z^0 e Z^2 si ottiene da Z^1 attaccando tre 2-celle f_1, f_2, f_3, e cioè le due calotte $\{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ e $\{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 < 0\}$ e il disco $\{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Infine, $Z = Z^3$ si ottiene da Z^2 attaccando due 3-celle e_1, e_2, e cioè le due calotte $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum x_i^2 = 1, x_4 > 0\}$ e

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum x_i^2 = 1, x_4 < 0\}$. Gli operatori bordo sono dati da:

$$\begin{aligned} \partial \ell &= 0\,, \\ \partial f_1 &= \partial f_2 = \partial f_3 = \ell\,, \\ \partial e_1 &= \partial e_2 = f_1 - f_2\,. \end{aligned}$$

Quindi $H_3(Z) \cong \mathbb{Z}$ è generato dalla classe di $e_1 - e_2$, $H_2(Z) \cong \mathbb{Z}$ è generato dalla classe di $f_1 - f_3$, che è uguale alla classe di $f_2 - f_3$, mentre $H_1(Z) = \{0\}$.

Per quanto riguarda il gruppo fondamentale, $\pi_1(Z^1, p) \to \pi_1(Z, p)$ è suriettiva. Il gruppo $\pi_1(Z^1, p)$ è ciclico infinito e generato dalla classe di ℓ. D'altra parte l'inclusione di Z^1 in Z si fattorizza $Z^1 \hookrightarrow D \hookrightarrow Z$, dove D è il disco $\{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Siccome D è semplicemente connesso la classe di ℓ in $\pi_1(Z, p)$ è banale. Quindi Z è semplicemente connesso.

(b) Sia Y lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di X e S^1 identificando un punto $x_0 \in S^1$ a p. Segue immediatamente dalla successione esatta di Mayer-Vietoris applicata a (un intorno di) X e a (un intorno di) S^1 in Y che $\widetilde{H}^q(Y) = \widetilde{H}^q(X) \oplus \widetilde{H}^q(S^1)$ per ogni q. Quindi Y ha le proprietà cercate.