Bollettino U. M. I.
(5) **18**-A (1981), 323-328

Una osservazione sulla topologia dei rivestimenti ciclici di varietà algebriche.

MAURIZIO CORNALBA (Pavia) (*)

Summary. – *We prove on analogue of the Lefschetz theorem on hyperplane sections for cyclic coverings X' of a smooth projective n-dimensional variety X branched along an ample divisor. The result is that X and X' have the same homotopy groups up to dimension $n-1$ and that $\pi_n(X')$ surjects onto $\pi_n(X)$.*

1. – Scopo di questa nota è la dimostrazione del seguente

TEOREMA. – *Sia X una varietà algebrica proiettiva e liscia di dimensione n su* **C**. *Sia $\pi: X' \to X$ un rivestimento ciclico di grado h diramato lungo un divisore ampio $B \subset X$. Siano x', $x = \pi(x')$ punti di X' e X. Allora l'omomorfismo*

$$\pi_*: \pi_q(X', x') \to \pi_q(X, x)$$

è un isomorfismo se $q < n$, ed è suriettivo se $q = n$.

Questo risultato non è certo sorprendente. Si noti che esso è l'analogo del classico teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane [3], [1], e anche la dimostrazione, si vedrà, ricalca da vicino quella data in [1] per il teorema di Lefschetz.

Tuttavia, poichè questo risultato non sembra essere noto e fornisce semplici dimostrazioni di risultati cui si poteva finora giungere solo con metodi « ad hoc » (si veda per esempio [2]), si è ritenuto opportuno enunciarlo esplicitamente e fornirne in dettaglio la dimostrazione.

2. – Dimostriamo il Teorema. Se $n = 1$ non vi è nulla da dimostrare. Se invece $n \geqslant 2$, ricordiamo che vi è un fibrato in

(*) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

rette L su X tale che $\mathcal{O}(L^h) \simeq \mathcal{O}(B)$ e tale altresì che X' si identifica alla immagine inversa, tramite il morfismo « potenza h-esima »:

$$L \to L^h$$

di una sezione di L^h il cui luogo di zeri sia B; inoltre π si identifica alla restrizione a X' della proiezione di L su X. Compattifichiamo L immergendolo in $W = \boldsymbol{P}(L \oplus I)$ e indichiamo con il simbolo π anche la proiezione di W su X. Identificheremo X alla sezione zero S_0 di W e indicheremo con S_∞ la sezione all'infinito di W. La dimostrazione del Teorema utilizza il seguente

Lemma 1. – *Se m è abbastanza grande $\mathcal{O}(mX' - S_\infty)$ è ampio su W.*

Dimostrazione. – Notiamo innanzitutto che

$$\mathcal{O}(X') \simeq \mathcal{O}(hS_0) \simeq \mathcal{O}(hS_\infty + \hat{B}) \,, \tag{1}$$

dove si è indicato con $\hat{B}$ il divisore $\pi^{-1}(B)$. Siano ζ_α coordinate di fibra per L, definite su aperti coordinati U_α con coordinate z_α. Le ζ_α sono legate da

$$\zeta_\alpha = f_{\alpha\beta}\zeta_\beta \,.$$

Le funzioni (z_α, ζ_α) danno coordinate locali su $\pi^{-1}(U_\alpha) - S_\infty$, mentre le (z_α, ξ_α), dove $\xi_\alpha = 1/\zeta_\alpha$, danno coordinate locali su $\pi^{-1}(U_\alpha) - S_0$.

Sia $\{h_\alpha\}$ una metrica per L. Le funzioni h_α soddisfano

$$|f_{\alpha\beta}|^2 h_\alpha = h_\beta \,,$$

e la corrispondente forma di curvatura, che possiamo supporre *positiva*, per l'ipotesi fatta su L, è

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,\partial\bar{\partial}\log(h_\alpha^{-1}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\,[h_\alpha \partial\bar{\partial} h_\alpha^{-1} - h_\alpha^2\, \partial h_\alpha^{-1} \wedge \bar{\partial} h_\alpha^{-1}] \,.$$

Le funzioni

$$k_\alpha = (h_\alpha^{-1} + |\zeta_\alpha|^2)^{-1}$$
$$k'_\alpha = (1 + h_\alpha^{-1}|\xi_\alpha|^2)^{-1}$$

soddisfano le relazioni

$$k_\alpha = |f_{\alpha\beta}|^{-2} k_\beta$$
$$k'_\alpha = k'_\beta$$
$$k'_\alpha = |\zeta_\alpha|^2 k_\alpha$$

e definiscono perciò una metrica su $\mathcal{O}(S_0)$, la cui forma di curvatura è, trascurando per semplicità di notazione il suffisso α,

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(h^{-1} + |\zeta|^2)^{-2}[h^{-2}\,\partial\bar\partial \log h^{-1} + h^{-1} d\zeta \wedge d\bar\zeta + \\ + |\zeta|^2 \partial\bar\partial h^{-1} - \zeta\, \partial h^{-1} \wedge d\bar\zeta - \bar\zeta\, d\zeta \wedge \bar\partial h^{-1}]\,. \tag{2}$$

Se $z_1, \ldots, z_h$ sono coordinate locali su $U = U_\alpha$, scriviamo

$$\partial h^{-1} = \sum a_i\, dz_i$$

$$\partial\bar\partial h^{-1} = \sum g_{ij}\, dz_i \wedge d\bar z_j\,.$$

L'ipotesi di positività fatta sulla metrica h dice che la matrice

$$(g_{ij} - h a_i \bar a_j)$$

è *definita positiva*. Consideriamo ora la matrice $(\gamma_{hk})_{h=0,\ldots,n;\,k=0,\ldots,n}$ dove

$$\gamma_{00} = h^{-1}\,,$$

$$\gamma_{0i} = \bar\gamma_{i0} = -\bar a_i \bar\zeta\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

$$\gamma_{ij} = |\zeta|^2 g_{ij}\,, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Questa matrice è definita positiva. In effetti, se $\eta_0, \ldots, \eta_n$ sono numeri complessi e uno tra $\eta_1, \ldots, \eta_n$ non è nullo

$$\sum_{i,j=0}^{n} \gamma_{ij}\eta_i\bar\eta_j > h^{-1}|\eta_0|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\eta_0 \bar\zeta \sum a_j \bar\eta_j\right) + |\zeta|^2 h \sum_{i,j=0}^{n} a_i\eta_i \bar a_j \bar\eta_j = \\ = \sum_{i,j=1}^{n} w_i \bar w_j > 0\,,$$

dove si è posto

$$w_0 = -h^{-\frac12}\eta_0\,,$$

$$w_i = h^{\frac12}\zeta a_i \eta_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Se invece $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$, $\eta_0 \neq 0$, si ha

$$\sum \gamma_{ij}\eta_i\bar\eta_j = h^{-1}|\eta_0|^2 > 0\,.$$

In virtù di (2) ciò, insieme alla positività di $(\sqrt{-1/2\pi})\,\partial\bar\partial \log h^{-1}$ su X, mostra che ω_0 è una $(1,1)$-forma *definita positiva* su $W - S_\infty$, mentre

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} h_\alpha^{-1} d\xi_\alpha \wedge d\bar{\xi}_\alpha \quad \text{su } S^\infty .$$

Calcoli analoghi mostrano che $\mathcal{O}(-S_\infty)$ possiede una metrica la cui forma di curvatura ω_∞ è tale che

$$\omega_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} [\partial\bar{\partial} \log h_\alpha^{-1} - h_\alpha^{-1} d\xi_\alpha \wedge d\bar{\xi}_\alpha] \quad \text{su } S_\infty .$$

Ciò mostra che, se $l \geqslant 2$, $l\omega_0 + \omega_\infty$ è positiva su S_∞.

Poichè ω_0 è positiva su $W - S_\infty$, se l è sufficientemente grande, $l\omega_0 + \omega_\infty$ è positiva su tutto W. In virtù di (1) ciò conclude la dimostrazione. Q.E.D.

Siano ora m, l interi positivi tali che $\mathcal{O}(mX' - lS_\infty)$ sia molto ampio. Consideriamo il sottospazio di $H^0(W, \mathcal{O}(mX'))$ generato da $H^0(W, \mathcal{O}(mX' - lS_\infty))$ e dalla sezione che ha come luogo di zeri mX'. Questo sottospazio corrisponde a un sottosistema lineare senza punti base di $|\mathcal{O}(mX')|$, di dimensione

$$N = \dim H^0(W, \mathcal{O}(mX' - lS_\infty)) .$$

Esso definisce un morfismo φ di W su una sottovarietà di $\boldsymbol{P}^N$; φ è biregolare fuori da S_∞ e contrae S_∞ a un punto. Inoltre, se F è una fibra di π, l'indice di ramificazione di $\varphi|_F$ in $F \cap S_\infty$ è esattamente uguale a l.

Ricordiamo che un sottoinsieme A di $\boldsymbol{C}$ si dice *stellato* rispetto a un suo punto p se per ogni punto q di A il segmento congiungente p a q è interamente contenuto in A. Vale allora il

LEMMA 2. - *Siano*

$$f_i(z_1, \ldots, z_n, \xi) , \quad i = 1, \ldots, N$$

funzioni olomorfe definite in un intorno del punto $z_1 = \ldots = z_n = \xi = 0$. *Poniamo* $f = (f_1, \ldots, f_N)$. *Supponiamo che* $f(0, \ldots, 0) = 0$ *e che, per ogni valore di* $z_1, \ldots, z_n$, *il morfismo*

$$\xi \mapsto f(z_1, \ldots, z_n, \xi)$$

abbia in $\xi = 0$ *un punto di ramificazione di indice* l. *Allora esiste un numero* $\varepsilon_0 > 0$ *tale che, se* $(z_1, \ldots, z_n)$ *appartiene a un opportuno* *intorno di* $(0, \ldots, 0)$, *e* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\{\xi | \, \|f(z_1, \ldots, z_n, \xi)\| < \varepsilon\}$$

è stellato rispetto all'origine.

DIMOSTRAZIONE. – Possiamo scrivere

$$f_i = u_i(z, \ldots, z_n)\xi^l + \text{(termini di ordine} > l \text{ in } \xi)\,, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

dove $u_i(0, \ldots, 0) \neq 0$ per almeno un valore di i. Scrivendo $\xi = \varrho e^{i\theta}$, si ha

$$\|f\| = \varrho^l \sqrt{\sum |u_i|^2} + \text{(termini di ordine} > l \text{ in } \varrho)\,.$$

Perciò, se $\varrho, z_1, \ldots, z_n$ sono sufficientemente vicini a zero, $|f|$ è una funzione crescente di ϱ. Ciò dimostra il lemma. Q.E.D.

Sia H l'iperpiano in $\boldsymbol{P}^N$ che taglia su W il divisore mX'. Scegliamo una identificazione di $\boldsymbol{P}^N - H$ con $\boldsymbol{C}^N$, indichiamo con d la distanza euclidea e poniamo

$$\{p\} = \varphi(S_\infty)\,.$$

Porremo anche

$$\hat{W} = \{q \in \varphi(W) | d(p, q) > \varepsilon\}$$

dove ε è un numero reale positivo da determinarsi. In virtù del Lemma 2, $X = S_0$ è un retratto di deformazione di W, purchè ε sia sufficientemente piccolo. Inoltre segue dalla dimostrazione del Lemma 2 che, se ε è piccolo, non vi sono punti critici della funzione $q \mapsto d(p, q)$ sul bordo di W. Perciò, se p' è sufficientemente vicino a p, il gradiente di

$$g(q) = d(p', q)$$

è diretto verso l'interno di $\hat{W}$ in ogni punto del bordo di $\hat{W}$, ed inoltre $g(q)$ non ha punti critici nella regione

$$\left\{q \in \varphi(W) | \min_{q' \in \partial \hat{W}} g(q') < g(q) < \max_{q' \in \partial \hat{W}} g(q')\right\}.$$

Da ciò segue che

$$\hat{W} = \left\{q \in \varphi(W) | g(q) \geqslant \max_{q' \in \partial \hat{W}} g(q')\right.$$

è un retratto di deformazione di $\hat{W}$. D'altra parte è classico che, se p' è generale, g ha su $\tilde{W} - \varphi(x')$ solo punti critici non degeneri di indice al più pari a $n + 1$. La teoria di Morse dice allora che, per ogni $\delta > 0$, $\hat{W}$ ha lo stesso tipo di omotopia di

$$W_\delta \cup (\text{celle di dimensione } \geqslant n + 1)$$

dove si è posto

$$W_\delta = \left\{ q \in \tilde{W} \,|\, g(q) \geqslant \frac{1}{\delta} \right\}$$

Ora X' è retratto di deformazione di un suo intorno $I \subset \tilde{W}$. Scegliamo δ in modo che $W_\delta \subset I$. Consideriamo gli omomorfismi

$$\pi_q(X', x') \xrightarrow{\alpha} \pi_q(W_\delta, x') \xrightarrow{\beta} \pi_q(I, x') \xrightarrow{\gamma} \pi_q(\tilde{W}, x') = \pi_q(X, x) .$$

L'omomorfismo $\beta \circ \alpha$ è sempre un isomorfismo, mentre $\gamma \circ \beta$ è un isomorfismo se $q < n$ ed è suriettivo se $q = n$. Perciò $\pi_* = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ è un isomorfismo se $q < n$ ed è suriettivo se $q = n$. Ciò conclude la dimostrazione del Teorema.

Per concludere osserviamo che, poichè sia X che X' hanno il tipo di omotopia di un CW-complesso, il Teorema implica che l'omomorfismo

$$H_q(X', \mathbf{Z}) \to H_q(X, \mathbf{Z})$$

è un isomorfismo se $q < n$ ed è suriettivo se $q = n$; in coomologia,

$$H^q(X, \mathbf{Z}) \to H^q(X', \mathbf{Z})$$

è un isomorfismo se $q < n$ ed è iniettivo se $q = n$. Inoltre $H^n(X', \mathbf{Z})/H^n(X, \mathbf{Z})$ è privo di torsione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti - T. Frankel, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*, Ann. of Math., **69** (1959), 713-717.

[2] H. Clemens, *Double solids*, di prossima pubblicazione.

[3] S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris, 1924.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 25 luglio 1980