Esercizi di Geometria Differenziale

Università degli Studi di Pavia
a.a. 2006/2007

Esercizi e note per il corso tenuto dal prof.
S. Demichelis

a cura di E. Dolera

Capitolo 1

Varietà e funzioni

1.1 Varietà

1) La struttura differenziale ordinaria su $\mathbb{R}$ si ottiene considerando l'atlante $\mathcal{A}$ contenente l'identità come carta globale. Dopo aver dimostrato che la mappa $x \mapsto x^3$ fornisce una carta globale per $\mathbb{R}$, si denoti con $\overline{\mathcal{A}}$ l'atlante costituito unicamente da tale carta. Si provi che $\mathcal{A}$ e $\overline{\mathcal{A}}$ sono atlanti incompatibili, sebbene $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{A}})$ siano varietà diffeomorfe.

2) Usando la proiezione stereografica, mostrare che ciascuna sfera S^n possiede un atlante differenziabile costituito precisamente da due carte. Mostrare che non si può costruire su S^n un atlante con meno di due carte.

3) Trovare una funzione liscia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che il luogo dei suoi zeri coincida col toro bidimensionale $T^2 := S^1 \times S^1$. Ragionando sulla funzione g dedurre che T^2 è una varietà differenziabile compatta.

4) Mostrare che l'insieme $\{ \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; xy = a \, \}$ ammette una struttura di varietà differenziabile se e solo se $a \neq 0$.

5) L'iperboloide n-dimensionale $H_a^{(n)}$ è definito come il luogo degli zeri, in $\mathbb{R}^{n+1}$, della funzione $x_1^2 - x_2^2 - ... - x_{n+1}^2 - a$, essendo a una costante reale. Mostrare che, qualunque sia n, $H_a^{(n)}$ ammette una struttura di varietà differenziabile se e solo se $a \neq 0$.

6) Le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ si possono spesso rappresentare come luogo degli zeri di una funzione liscia avente Jacobiana di rango massimo in ogni punto dell'insieme considerato. L'insieme $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = 0\}$ ammette una struttura di varietà differenziabile sebbene il gradiente di $x^3 - y^3$ si annulli nell'origine. Perchè?

7) Si definisca il nastro di Möbius M come il quoziente topologico dello spazio $[0, 1] \times \mathbb{R}$ tramite la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ che identifica i punti del tipo $(0, t)$ con quelli del tipo $(1, -t)$. Mostrare che M può essere dotata di una struttura di varietà differenziabile consistente con la sua topologia. È una varietà compatta?

8) Si definisca la bottiglia di Klein K come il quoziente topologico dello spazio $[0, 1] \times [0, 1]$ tramite la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ che identifica i punti del tipo $(0, t)$ con quelli del tipo $(1, t)$ e i punti del tipo $(s, 0)$ con quelli del tipo $(1 - s, 1)$. Mostrare che K può essere dotata di una struttura di varietà differenziabile consistente con la sua topologia. È una varietà compatta? Avendo dimensione 2, ammette una parametrizzazione che la renda una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$?

9) Lo spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ottiene, come spazio topologico, come il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ in base alla relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ che identifica i punti $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_n)$ se e solo se esiste un numero reale λ non nullo per cui $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$. Equivalentemente, lo spazio proiettivo n-dimensionale si può ottenere a partire dalla sfera S^n identificando tutte le coppie di punti antipodali. Ne risulta, evidentemente, uno spazio di Hausdorff compatto. Si costru-

isca un atlante differenziabile che renda ciascuno spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una varietà. La medesima costruzione si può poi imitare sostituendo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$. (Si ricordi di raddoppiare le dimensioni).

10) Dati due interi $n \geq k$, l'insieme dei sottospazi di dimensione k di $\mathbb{R}^n$ è detta grassmanniana $G(k,n)$. Ogni cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$ è rappresentato da una matrice non-singolare: la moltiplicazione per ciascuna di queste matrici scambia tra loro i sottospazi, definendo un'azione su $G(k,n)$. Provare ad usare questo fatto per costruire un atlante per le varie grassmanniane. Concludere anche che esse sono tutte varietà compatte.

11) L'insieme delle matrici quadrate $n\times n$ a entrate reali è in modo naturale una varietà. Perchè? Dare qualche esempio di sottogruppi di questo spazio che risultano delle varietà in modo naturale.

12) Il gruppo ortogonale $O(n)$ ammette una struttura di varietà differenziale in $\mathbb{R}^{n^2}$. Per vedere ciò, piuttosto che costruire direttamente le carte locali, conviene notare che ogni matrice ortogonale A soddisfa la relazione $A \cdot^t A = I$ e usare il teorema della funzione implicita. La varietà $O(n)$ risulta compatta? Che dimensione ha? Il sottogruppo $SO(n)$ delle matrici ortogonali con determinante $+1$ risulta a sua volta una varietà. Che dimensione ha?

13) Un esempio particolare di varietà è data dalle cosiddette varietà di Brieskorn. Dato un intero d non negativo, $W^{2n-1}(d)$ è definito come l'insieme dei punti $(z_0, z_1, ..., z_n)$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ tali che

$$\begin{cases} z_0^d + z_1^2 + ... + z_n^2 = 0 \\ z_0\overline{z}_0 + ... + z_n\overline{z}_n = 1 \ . \end{cases}$$

Munire $W^{2n-1}(d)$ della struttura di varietà differenziabile.

14) Dopo aver verificato che tutte le varietà sono spazi regolari e paracompatti, concludere che sono spazi topologici normali e in particolare metrizzabili.

1.2 Funzioni tra varietà

1) (*) Siano M ed N due varietà e $f : M \to N$ una funzione liscia. Dimostrare che se f è biunivoca e con differenziale iniettivo in ogni punto allora è un diffeomorfismo. (Suggerimento: tale enunciato dipende pesantemente dal secondo assioma di numerabilità delle varietà, che assumiamo per definizione).

2) Siano M ed N due varietà della stessa dimensione e $f : M \to N$ una funzione liscia. Dimostrare che se M è compatta, N connessa e f è un'immersione allora f è suriettiva. In particolare una funzione liscia da una varietà compatta n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ non può avere differenziale iniettivo.

3) Dimostrare che una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non può essere iniettiva.

4) Date due varietà M ed N, si dimostri che una mappa $f : M \to N$ è liscia se e solo se, per ogni varietà W e per ogni mappa liscia $g : W \to M$, la composizione $f \circ g : W \to N$ è liscia.

5) Dati due interi $n > k$, la mappa $f : G(k, n) \to G(n - k, n)$ che associa ad ogni sottospazio di dimensione k il suo complemento ortogonale è un diffeomorfismo analitico.

6) (*) Una varietà connessa (senza bordo) di dimensione uno è diffeomorfa a S^1 nel caso sia compatta e a $\mathbb{R}$ altrimenti. Rivedere l'esercizio 1) della prima sezione (varietà) alla luce di questo fatto più generale.

7) $^{(*)}$ Esiste sempre un diffeomorfismo liscio tra un dominio stellato di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ stesso?

8) $^{(*)}$ Una mappa di classe C^k, $k \geq 1$, che sia un diffeomorfismo di classe C^1 è anche un diffeomorfismo di classe C^k.

9) Dimostrare che la grassmanniana $G(2,3)$ è diffeomorfa allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. (Suggerimento: usare l'esercizio 5) della presente sezione).

10) $^{(*)}$ Dimostrare che le varietà $SO(3)$ e $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono diffeomorfe.

11) $^{(*)}$ Dimostrare che la varietà dei sottospazi orientati di dimensione 2 in $\mathbb{R}^4$ (che non è G(2,4)!) è diffeomorfa a $S^2 \times S^2$.

1.3 Immersioni, summersioni, embedding e sottovarietà

1) Sia $f : M \to N$ una summersione tra le varietà M ed N. Dimostrare che, per ogni y in N, la fibra $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà di M.

2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1 \ .$$

Per quali di questi punti $\mathbf{p} = (0, 0)$, $\mathbf{p} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\mathbf{p} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ il sottoinsieme $f^{-1}(f((p)))$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^2$?

3) Dimostrare che esiste sempre un embedding di $\mathbb{R}^m$ in una varietà di dimensione n se $n \geq m$.

4) Dimostrare che se una varietà M di dimensione n è prodotto di sfere allora esiste un embedding di M in $\mathbb{R}^{n+1}$.

5) $^{(*)}$ Trovare un'immersione del toro punturato $T^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$ in $\mathbb{R}^2$. Generalizzare in dimensione n.

6) $^{(*)}$ Dimostrare che non esiste alcuna immersione del nastro di Möbius nel piano.

7) $^{(*)}$ Trovare un embedding di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^4$.

8) $^{(*)}$ Trovare, per ogni n, un embedding di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ in S^{2n}.

1.4 Campi vettoriali

1) Definire un campo vettoriale su S^2 che abbia esattamente due zeri e uno che abbia uno zero soltanto.

2) Dato il campo vettoriale

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

se ne trovino le curve integrali. Qual è la curva integrale passante per l'origine?

3) Sia M il primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$ e si consideri la famiglia di curve in M

$$x(t) = t \qquad y(t) = \frac{a}{t}$$

parametrizzate dal parametro reale positivo a. Di quale campo vettoriale esse sono le curve integrali?

4) Si consideri, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, il seguente campo vettoriale

$$-\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \theta}$$

espresso nelle coordinate polari (ρ, θ). Se ne trovino le curve integrali. A parole, come descrivereste tali curve?

5) Un campo vettoriale si dice completo se la curva integrale centrata, di volta in volta, in ciascun punto della varietà ammette tutto $\mathbb{R}$ per dominio. È vero che ogni campo su $\mathbb{R}$ è completo?

6) Dimostrare che un campo vettoriale su una varietà compatta è completo.

7) Sia $\gamma(t)$ una curva integrale di un campo X su M. Supponiamo che $\dot{\gamma}(t) = 0$ per qualche t. Si dimostri allora che γ è costante.

8) Siano N una sottovarietà (non necessariamente embedded) di M e $\gamma :]a, b[\to M$ una curva liscia per cui $\gamma(]a, b[) \subseteq N$. Si faccia un esempio in cui non risulti necessariamente $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}(N)$ per ogni t in $]a, b[$.

1.5 Fibrato tangente

1) Dimostrare che sussiste un diffeomorfismo naturale tra $T_{M\times N}$ e $T_M \times T_N$.

2) Per ogni intero naturale n sussiste il diffeomorfismo $T_{S^n} \times \mathbb{R} \approx S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

3) Dimostrare che il fibrato tangente di S^2 non è banale. Dimostrare inoltre che esso ammette un atlante costituito da esattamente due carte.

4) Dimostrare che il fibrato tangente di S^1 e di S^3 è banale.

5) $^{(**)}$ Dimostrare che il fibrato tangente di S^7 è banale.

6) $^{(***)}$ Dimostrare che le sole sfere con fibrato tangente banale sono S^1, S^3 e S^7.

1.6 Orientabilità

1) Si dimostri che il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein sono varietà non orientabili.

2) Si dimostri che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si può ottenere (sia come spazio topologico, sia, più in generale, come varietà) dall'incollamento del disco D^2 con un nastro di Möbius lungo il loro bordo. Da ciò si concluda che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è orientabile.

3) Una sottovarietà embedded in una varietà orientabile è necessariamente orientabile?

4) Si dimostri che il prodotto di due varietà orientabili è orientabile.

5) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione liscia con gradiente mai nullo. Allora, per ogni y nel codominio di f, $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà embedded in $\mathbb{R}^n$ orientabile.

6) Dimostrare che il fibrato tangente risulta sempre una varietà orientabile.

1.7 Il Gruppo Ortogonale

Definizione 1.7.1 (Gruppo Ortogonale)**.** Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo e $M(n, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate $n \times n$ con entrate reali. Definiamo il Gruppo Ortogonale $O(n)$ mediante la formula

$$O(n) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^t\!AA = I\}. \tag{1.1}$$

Osservazione 1.7.2. Le matrici di $O(n)$ sono non singolari, e ciò si ottiene dalla relazione ${}^t\!AA = I$ calcolando il determinante di ambo i termini dell'uguaglianza. $A \in O(n)$ implica che $det(A) = \pm 1$.
$O(n)$ risulta un gruppo considerando la moltiplicazione di matrici come composizione interna. L'applicazione $det : O(n) \to \{\pm 1\}$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi (verificare!).
Ci sono quindi matrici di $O(n)$ con determinante -1. Il sottoinsieme di $O(n)$ costituito dalle sole matrici con determinante $+1$ è un sottogruppo ed ha una

dignità propria: esso è $SO(n)$, il Gruppo Speciale Ortogonale. Si ha pertanto la seguente catena di inclusione di gruppi $SO(n) \subset O(n) \subset GL(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$, dove $GL(n, \mathbb{R})$ sta ad indicare lo spazio delle matrici $n \times n$ con entrate reali non singolari.
Il lettore interessato può consultare il libro di H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, (1946).

Problema 1.7.3. *Ora mostriamo che l'insieme $O(n)$ appena definito ammette una struttura differenziale secondo la quale esso risulta una varietà compatta di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. Inoltre $O(n)$ è una varietà sconnessa e la componente connessa all'identità è proprio $SO(n)$.*

Affrontare tale problema in modo diretto, cioè costruendo a mano una topologia su $O(n)$ e un atlante, è laborioso. Useremo il Teorema della Funzione Implicita, che è uno strumento di notevole potenza per costruire varietà.

Teorema 1.7.4 (della Funzione Implicita)**.** Siano m e n due interi positivi, M e N due varietà differenziabili lisce di dimensione m ed n rispettivamente, $\psi : M \to N$ una mappa liscia e q un punto di N. Supponiamo che $P := \psi^{-1}(q)$ sia un sottoinsieme non vuoto di M e che il differenziale $\psi_{\star p} : T_p(M) \to T_{\psi(p)}(N)$ sia suriettivo per tutti i punti $p \in P$. Detta $i : P \to M$ l'inclusione, ne viene che P ammette un'unica struttura di varietà differenziabile in modo che (P, i) sia una sottovarietà embedded in M di dimensione $m - n$.

Ora si tratta di usare in modo furbo il teorema. Occorre però fare alcune premesse sugli spazi di matrici.
$M(n, \mathbb{R})$ ha una struttura naturale di varietà differenziabile liscia. Le funzioni $m_{ij} : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che associano alla generica matrice l'entrata ij-esima permettono di stabilire una biezione tra $M(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{n^2}$. Mediante tale biezione $\mathbb{R}^{n^2}$ passa a $M(n, \mathbb{R})$ la sua propria struttura di varietà. Ovvi-

amente la dimensione di $M(n,\mathbb{R})$ come varietà è n^2.

Si consideri $det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Questa mappa è liscia (addirittura analitica) tra le varietà in questione. Poichè $\{0\} \subset \mathbb{R}$ è un chiuso, $det^{-1}(\{0\})$ è un chiuso in $M(n,\mathbb{R})$. Pertanto, $GL(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R}) \setminus det^{-1}(\{0\})$ è un aperto di $M(n,\mathbb{R})$, quindi è una varietà anch'essa di dimensione n^2.

Infine consideriamo $Simm(n,\mathbb{R})$, lo spazio delle matrici $n \times n$ con entrate reali simmetriche. La condizione sulla simmetria vincola, ad esempio, tutte le entrate sopra la diagonale, una volta siano date quelle della diagonale e quelle sotto. Prendendo ancora le funzioni $m_{ij} : Simm(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definite come sopra e ragionando analogamente, ne viene che $Simm(n,\mathbb{R})$ è una varietà di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ (numero delle coordinate libere).

Mettiamo tutto insieme e usiamo il Teorema citato. Il ruolo di M sarà assunto da $GL(n,\mathbb{R})$, quello di N da $Simm(n,\mathbb{R})$.

L'applicazione $\psi : GL(n,\mathbb{R}) \to Simm(n,\mathbb{R})$ associa alla generica matrice invertibile A la matrice simmetrica ${}^tAA$. Tale mappa è liscia, e ciò è ancor più evidente se la si pensa come restrizione di una mappa che compie lo stesso servizio (cioè $A \mapsto {}^tAA$) sulla generica matrice di $M(n,\mathbb{R})$. Le operazioni compiute sulle entrate sono somme e prodotti, tutte operazioni lisce.

Il punto q del Teorema non è nient'altro che I, la matrice identità $n \times n$, pensata in $Simm(n,\mathbb{R})$. $\psi^{-1}(I)$ è non vuoto e coincide, per definizione, proprio con $O(n)$. Per concludere basta controllare che il differenziale di ψ sia suriettivo in ogni punto di $O(n)$. Fissiamo la generica matrice $A \in O(n)$ e vediamo come opera il differenziale.

$$\psi_{\star A} : T_A(GL(n,\mathbb{R})) \to T_{\psi(A)}(Simm(n,\mathbb{R})) = T_I(Simm(n,\mathbb{R}))$$

Poichè $Simm(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ possiamo compiere l'identificazione

$$T_I(Simm(n,\mathbb{R})) \cong Simm(n,\mathbb{R}).$$

Fissiamo $A \in O(n)$. Lo spazio tangente $T_A(GL(n,\mathbb{R}))$ sarà pensato come l'insieme dei "vettori" tangenti in A alle curve in $GL(n,\mathbb{R})$ passanti per A. Per capire meglio il concetto facciamo un esempio che ci servirà nei calcoli: sia $R \in M(n,\mathbb{R})$ e consideriamo $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to GL(n,\mathbb{R})$ definita da $\gamma(t) := A + tR$. R è una matrice generica ma fissata: se ϵ è piccolo $A + tR \in GL(n,\mathbb{R})$ per ogni t in $(-\epsilon,\epsilon)$, semplicemente per continuità del determinante. Calcoliamo il "vettore" tangente in A: siccome $\gamma(0) = A$ si deve calcolare $\dot{\gamma}(0)$.

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}\big(A + tR\big)_{|t=0} = \big(R\big)_{|t=0} = R$$

da cui si nota il fatto importante che ogni matrice di $M(n,\mathbb{R})$ è un "vettore" tangente in A, quindi un elemento di $T_A(GL(n,\mathbb{R}))$.

Il lettore interessato dovrebbe approfondire il concetto di Gruppo di Lie e di Algebra di Lie; un ottimo riferimento è il libro di C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, (1946).

Torniamo a noi e operiamo finalmente il conto che ci serve: data $R \in T_A(GL(n,\mathbb{R}))$ (quindi R può tranquillqmente pensarsi come un elemento di $M(n,\mathbb{R})$ per quanto appena detto), calcoliamo $\psi_{\star A}(R)$.

$$\begin{aligned}
\psi_{\star A}(R) &= \frac{d}{dt}\big(\,{}^t(A + tR)(A + tR)\big)_{|t=0} = \\
\frac{d}{dt}\big(I + t(\,{}^tAR + {}^tRA) + t^2(\,{}^tRR)\big)_{|t=0} &= \big((\,{}^tAR + {}^tRA) + 2t\,{}^tRR\big)_{|t=0} = \\
&= {}^tAR + {}^tRA
\end{aligned}$$

Per vedere che il differenziale è suriettivo si prenda una generica matrice $S \in T_I(Simm(n,\mathbb{R})) \cong Simm(n,\mathbb{R})$ e si provi che esiste sempre una matrice $R \in T_A(GL(n,\mathbb{R})) \cong M(n,\mathbb{R})$ per cui $\psi_{\star A}(R) = S$. La scelta $R^* = \frac{1}{2}AS$ fa al caso nostro; infatti:

$$\begin{aligned}
\psi_{\star A}(R^*) &= {}^tAR^* + {}^tR^*A = \\
= {}^tA\Big(\frac{AS}{2}\Big) + {}^t\Big(\frac{AS}{2}\Big)A &= \frac{1}{2}\,{}^tAAS + \frac{1}{2}\,{}^tS\,{}^tAA = \\
\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\,{}^tS &= S
\end{aligned}$$

essendo S simmetrica e A ortogonale.
Il Teorema della Funzione Implicita permette di concludere che $O(n)$ ammette un'unica struttura differenziale che lo rende una sottovarietà embedded in $GL(n, \mathbb{R})$; la sua dimensione è $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$O(n)$ è una varietà compatta. Essendo un sottospazio topologico di $\mathbb{R}^{n^2}$ a fronte dell'embedding descritto sopra, basta vedere che $O(n)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^{n^2}$. Per la chiusura si ragioni topologicamente: se $\{A_n\}_{n \geq 1}$ è una successione di matrici in $O(n)$ convergente in $M(n, \mathbb{R})$ si ha facilmente che il limite è ancora in $O(n)$, in quanto le operazioni di trasposizione e moltiplicazione commutano con il limite. Per vedere che $O(n)$ è limitato basta osservare che le colonne di una matrice ortogonale costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Dunque la norma euclidea di tali colonne (pensate come vettori) è 1. Se consideriamo la norma L^∞ su $\mathbb{R}^n$ essa è equivalente a quella euclidea, perchè $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach di dimensione finita. Allora, a meno di una costante moltiplicativa che stabilisce l'equivalenza delle norme, si ha $\mid a_{ij} \mid \leq 1$ per $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ e per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in O(n)$. Dunque $O(n)$ è limitato, ed essendo anche chiuso è compatto.

$O(n)$ è sconnesso. Considerando ancora $det : O(n) \to \mathbb{R}$ si vede che questa mappa è continua e $det(O(n)) = \{\pm 1\}$, per quanto detto nell'Osservazione; ma $\{\pm 1\}$ è sconnesso e questo prova che $O(n)$ non può essere connesso.
Se mostriamo che $SO(n)$ è connesso, otteniamo ovviamente il connesso massimale che contiene I. Ogni sottoinsieme di $O(n)$ che contiene strettamente $SO(n)$ è sconnesso per l'osservazione fatta sul determinante.
La connessione di $SO(n)$ discende immediatamente dai seguenti risultati legati alla teoria dei Gruppi di Lie:

Teorema 1.7.5. Sia H un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie G. Se H e G/H sono connessi, allora G è connesso.

Teorema 1.7.6. Per $n \in \mathbb{N}$ maggiore di 1 sussiste il diffeomorfismo

$$SO(n)/SO(n-1) \approx S^{n-1}$$

L'induzione e il fatto che $SO(1) = \{1\} \subset \mathbb{R}$ e le sfere n-dimensionali $(n \geq 1)$ sono insiemi connessi permettono di concludere.

1.8 Le Grassmanniane

Definizione 1.8.1 (Grassmanniana)**.** Siano $n, k \in \mathbb{N}$ due interi positivi e $k \leq n$. Definiamo la Grassmanniana $G_{k,n}$ mediante la formula

$$G_{k,n} := \{ \text{ sottospazi vettoriali } k- \text{ dimensionali di } \mathbb{R}^n \}. \tag{1.2}$$

Problema 1.8.2. *Ora mostriamo che l'insieme $G_{k,n}$ appena definito ammette una struttura differenziale secondo la quale esso risulta una varietà compatta di dimensione $k(n-k)$.*

Anche in questo caso procedere per via diretta, cioè costruire a mano una topologia e una struttura differenziale su $G_{k,n}$, è laborioso. Una presentazione di questo tipo si può trovare con un certo numero di dettagli sul libro di Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, pagg. 188-189.
In questa sezione seguiremo una via indiretta, ma più elegante, che fa uso della Teoria dei Gruppi di Lie. Ecco qui di seguito alcune definizioni che possono tornare utili.

Definizione 1.8.3 (Gruppo di Lie)**.** Un gruppo di Lie è una varietà differenziabile che è anche munita della struttura di gruppo; si richiede che le applicazioni $\mu : G \times G \to G$ e $\iota : G \to G$ definite, rispettivamente, dalle formule

$$\mu(g, g') := gg'$$
$$\iota(g) := g^{-1}$$

siano lisce considerando le opportune strutture differenziali.

Definizione 1.8.4 (Omomorfismo di Gruppi di Lie)**.** Dati due gruppi di Lie G e G', una mappa $\phi : G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie quando è una mappa liscia tra varietà e contemporaneamente anche un omomorfismo di gruppi.
In maniera analoga si definisce il concetto di Isomorfismo di Gruppi di Lie.

Definizione 1.8.5 (Sottogruppo di Lie)**.** Dato un gruppo di Lie G, si definisce sottogruppo di Lie di G la coppia (H, ϕ) dove

1) H è un gruppo di Lie;

2) (H, ϕ) è una sottovarietà di G;

3) $\phi : H \to G$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Un ruolo particolare nella teoria dei gruppi di Lie è assunto dai sottogruppi chiusi. (Si invita il lettore a riflettere sulle analogie con la Teoria di Galois nel caso di estensioni di campi non finite).
Vale il seguente

Teorema 1.8.6. Siano G un gruppo di Lie e H un suo sottoinsieme. Supponiamo che H sia chiuso (topologicamente) in G e sia anche un sottogruppo (dal punto di vista algebrico). Allora esiste un'unica struttura differenziale su H che rende (H, i) un sottogruppo di Lie di G, dove $i : H \to G$ è l'inclusione.

Un'ulteriore rilevanza dei sottogruppi chiusi sta nel fatto che possono essere impiegati per costruire i quozienti senza stravolgere la topologia iniziale.
Ricordiamo che, dati un gruppo G e un suo sottogruppo H (nel senso algebrico), si può sempre costruire il quoziente G/H come spazio delle classi laterali sinistre. Il fatto di non richiedere la normalità ad H può creare

l'inconveniente che le classi laterali destre siano diverse da quelle sinistre e che G/H non abbia più una composizione che lo renda un gruppo. Questo per noi ha poca importanza: faremo la convenzione che G/H rappresenti sempre lo spazio delle classi laterali sinistre. Vale il seguente risultato:

Teorema 1.8.7. Siano G un gruppo di Lie e H un suo sottoinsieme tale che (H, i) risulti un sottogruppo di Lie di G chiuso, dove $i : H \to G$ è l'inclusione. Denotata con $\pi : G \to G/H$ la proiezione canonica ($\pi(g) = gH$), risulta che G/H ammette un'unica struttura di varietà differenziale in modo che π sia liscia e, per ogni classe laterale $gH \in G/H$, esistano un intorno U di gH in G/H e una mappa liscia $\rho : U \to G$ tale che $\pi \circ \rho = id_U$.

Ora richiamiamo qualche breve nozione di Teoria dei Gruppi.

Definizione 1.8.8 (Azione di Gruppo su un Insieme)**.** Siano G un gruppo e X un insieme qualunque non vuoto. Un'azione sinistra di G su X è una funzione $\Theta : G \times X \to X$ tale che

1) per ogni g e g' in G e per ogni x in X vale la formula

$$\Theta(g, \Theta(g', x)) = \Theta(gg', x);$$

2) per ogni x in X

$$\Theta(e, x) = x,$$

dove e è l'elemento neutro di G.

D'ora in poi, per semplicità, useremo la notazione $g(x)$ in luogo di $\Theta(g, x)$. Un'azione si dice transitiva quando, per ogni coppia di punti x e y di X esiste g in G tale che $y = g(x)$.

Definizione 1.8.9. Siano G un gruppo, X un insieme qualunque non vuoto e $\Theta : G \times X \to X$ un'azione di G su X. Per ogni x in X definiamo lo stabilizzatore di x mediante la formula

$$G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

È semplice notare che G_x è un sottogruppo di G; in generale non è normale. Si può osservare anche che $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$ per ogni g in G e x in X. Quindi gli stabilizzatori di x e $g(x)$ sono coniugati tra loro, pertanto isomorfi.
Arriviamo così alla proposizione fondamentale che ci permetterà in seguito di descrivere la struttura differenziale della grassmanniana:

Proposizione 1.8.10. Se $\Theta : G \times X \to X$ è un'azione transitiva del gruppo G sull'insieme X, per ogni $x \in X$ fissato, la suriezione $\pi_x : G \to X$ definita dalla formula $\pi_x(g) = g(x)$, induce una biezione (ben definita)

$$\bar{\pi}_x : G/G_x \to X$$
$$\bar{\pi}_x(gG_x) := g(x).$$

Applichiamo tutto questo macchinario alla costruzione di una struttura differenziale sull'insieme $G_{k,n}$ dei k-piani in $\mathbb{R}^n$, come definito all'inizio della sezione.

Consideriamo il Gruppo Ortogonale $O(n)$ definito nella sezione precedente e costruiamo l'azione $\Theta : O(n) \times G_{k,n} \to G_{k,n}$ come segue: se R è una matrice di $O(n)$ e W un sottospazio k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$, si prenda una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k\}$ di W e si definisca $\Theta(R, W) := \text{span}\{R\mathbf{w}_1, R\mathbf{w}_2, ..., R\mathbf{w}_k\}$.
Per prima cosa si deve controllare che l'azione Θ sia ben definita: la scelta di una base per W ha svolto un ruolo protagonista, ma in realtà non cambia nulla se si opera una scelta differente. Sia $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_k\}$ un'altra base per W. Vale infatti una relazione di dipendenza lineare tra i vettori delle due basi: per $i, j \in \{1, 2, ...n\}$ esistono coefficienti reali a_{ij} per cui

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mathbf{w}_j, \qquad i \in \{1, 2, ...n\}.$$

Pertanto, moltiplicando per R si ottiene

$$R\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} R\mathbf{w}_j, \qquad i \in \{1, 2, ...n\},$$

da cui si conclude che $\text{span}\{R\mathbf{w}_1, R\mathbf{w}_2, ..., R\mathbf{w}_k\} = \text{span}\{R\mathbf{z}_1, R\mathbf{z}_2, ..., R\mathbf{z}_k\}$, cioè l'azione è ben definita.

L'azione descritta è transitiva. Se U e V sono due sottospazi k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$, si prendano gli insiemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ che siano basi ortonormali per U e V rispettivamente (se non fossero ortonormali si applichi Gram-Schmidt). Completiamo entrambe questi insiemi a basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$, sempre grazie a Gram-Schmidt. Avremo così i due sistemi ortonormali $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k, ..., \mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k, ..., \mathbf{v}_n\}$. Esiste la matrice C di cambiamento di base, ad esempio dalla base degli $\{\mathbf{u}_i\}$ alla base dei $\{\mathbf{v}_j\}$, ed essa è in $O(n)$ (verificare!). Ora, per costruzione, $\Theta(C, U) = V$, dunque l'azione è transitiva.

Abbiamo visto che la transitività dell'azione permette di concludere che gli stabilizzatori sono tutti coniugati, dunque tutti isomorfi come gruppi. In virtù di questo isomorfismo, possiamo applicare la Proposizione (2.10) scegliendo un punto dell'insieme $X = G_{k,n}$ che più ci fa comodo: tale scelta non modifica la biezione che andiamo a costruire.

Sia $W_0 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_k\}$ dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ora una matrice $R \in O(n)$ stabilizza W_0 se e solo se è della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & T \end{array}\right) \tag{1.3}$$

dove S è una matrice $k \times k$ e T è $(n-k) \times (n-k)$. Inoltre, poichè la trasposizione e la moltiplicazione di matrici agiscono separatamente sui blocchi di una matrice a blocchi, essendo R ortogonale, ne viene che anche S e T lo sono. È anche immediato vedere che le matrici nella forma (3) costituiscono un sottogruppo chiuso di $O(n)$. Concludiamo che lo stabilizzatore

di W_0 è isomorfo, come sottogruppo di Lie di $O(n)$, a $O(k) \times O(n-k)$.
Applicando finalmente la Proposizione (2.10) con $G = O(n)$, $X = G_{k,n}$ e Θ l'azione descritta, si trova l'importante biezione

$$O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \leftrightarrow G_{k,n}. \tag{1.4}$$

Abbiamo osservato che, per ragioni strutturali, $(O(k) \times O(n-k)) \cong O(n)_{W_0}$ (lo stabilizzatore di W_0) è un sottogruppo chiuso di $O(n)$ e quindi, per il Teorema (2.7) ha un'unica struttura di varietà differenziale che garantisca le proprietà enunciate nel suddetto Teorema.È proprio questa struttura di varietà che viene indotta su $G_{k,n}$.
Per il calcolo della dimensione si ha

$$\frac{n(n-1)}{2} - \{\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\} = k(n-k).$$

Infine la compattezza discende dal fatto che $O(n)$ è compatto e $\pi : O(n) \to O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ è continua e suriettiva.