VETTORI ALEATORI DISCRETI

Siano date due v.a. discrete X e Y. Definiamo il vettore aleatorio (X, Y) e la sua densità di probabilità

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

al variare dei valori x e y assunti da X e da Y (cioè al variare dei valori (x, y) per la coppia (X, Y)).
Essa è detta **densità congiunta** e soddisfa le proprietà

- • $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k) \geq 0 \quad$ per ogni (x_i, y_k)
- •• $\sum_i \sum_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k) = 1$

Dalla densità congiunta si ottengono le **densità marginali**, cioè le densità di X e di Y:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k)$$

$$\mathbb{P}(Y = y_k) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k)$$

Nota la densità congiunta si calcolano le densità marginali, mentre il viceversa non è vero tranne nel caso in cui le v.a. X e Y siano indipendenti.
Infatti, se X e Y sono indipendenti si ha

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_k) \qquad \text{per ogni } i \text{ e } k$$

Ora consideriamo la v.a. somma $Z := X + Y$. Anche Z è una v.a. discreta e la sua densità di probabilità è data da

$$\mathbb{P}(Z = z_n) = \mathbb{P}(X + Y = z_n) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = z_n - x_i) \qquad \text{per ogni } n$$

Se conosciamo le densità marginali possiamo calcolare le speranze matematiche $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ e $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$ e le varianze $\text{var}(X)$ e $\text{var}(Y)$.
Vale la relazione

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

(basta conoscere le densità marginali per calcolare $\mathbb{E}[X + Y]$) mentre si ha

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \tag{1}$$

se X e Y sono indipendenti. Altrimenti si ha la relazione

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \tag{2}$$

dove la covarianza[1] è definita da

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_k (x_i - \mu_X)(y_k - \mu_Y)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_k)$$

[1] In analogia alla varianza definita da $\text{var}(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$.

e quindi var$(X+Y)$ è nota se si conosce la densità congiunta.
Si osservi che la covarianza può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$ mentre la varianza può assumere solo valori non negativi. Vale la formula

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_i \sum_k x_i y_k \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_k) - \mu_X \mu_Y \\ &\equiv \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

Nel caso in cui X e Y sono indipendenti si ha $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ (e quindi (2) si riduce a (1)) perché

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_i \sum_k (x_i-\mu_X)(y_k-\mu_Y)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_k) \\ &= \sum_i \sum_k (x_i-\mu_X)(y_k-\mu_Y)\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_k) \\ &= \left(\sum_i (x_i-\mu_X)\mathbb{P}(X=x_i)\right)\left(\sum_k (y_k-\mu_Y)\mathbb{P}(Y=y_k)\right) \\ &= \left(\sum_i x_i\mathbb{P}(X=x_i) - \mu_X\sum_i \mathbb{P}(X=x_i)\right)\left(\sum_k y_k\mathbb{P}(Y=y_k) - \mu_Y\sum_k \mathbb{P}(Y=y_k))\right) \\ &= (\mu_X - \mu_X\cdot 1)(\mu_Y-\mu_Y\cdot 1) = 0\end{aligned}$$

Non è vero che se $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ allora X e Y sono indipendenti.[2]
Riassumendo

$$X \text{ e } Y \text{ indipendenti} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \operatorname{cov}(X,Y)=0$$

ESERCIZIO

Si consideri la distribuzione del vettore aleatorio (X,Y) data da

$X \backslash Y$	-1	0	1
-2	1/12	1/6	0
0	1/12	1/3	1/12
3	1/12	0	1/6

- Calcolare le densità marginali.
- X e Y sono v.a. indipendenti?
- Calcolare la speranza matematica e la varianza di X e di Y.
- Calcolare la densità di probabilità della v.a. somma $Z=X+Y$.

---

[2] Si consideri $Y=X^2$ dove X assume i valori -2, 0 e 2 con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno. Si ha $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ ma X e Y non sono indipendenti.