ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 21/09/2016	COGNOME e Nome	firma

1. [5 pt] (a) Determinare il dominio di $f(x) = x\sqrt{|\log(x)|}$.

$\mathrm{dom} f = (0, +\infty)$

(b) Studiare i limiti di $g(x) = \dfrac{e^x + x}{x^2 - 1}$ agli estremi del dominio e stabilire se esistono asintoti verticali/orizzontali/obliqui.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = +\infty = \lim_{x \to -1^+} g(x)$

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty = \lim_{x \to -1^-} g(x)$

2. [6 pt] Calcolare la derivata prima di $h(x) = \sqrt{\frac{|x-1|}{x}}$, specificando i domini di h, h'.

$\mathrm{dom}\, h = (0, +\infty)$

$\mathrm{dom}\, h' = (0,1) \cup (1, +\infty)$

$$h'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \dfrac{-\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1-x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Studiare i punti di non derivabilità di h.

Per $x \to 1$ $h(x) \sim \sqrt{|x-1|}$

$x = 1$ cuspide

Determinare gli intervalli in cui h è crescente e quelli in cui h è decrescente.

h crescente in $]+1, +\infty[$

decrescente in $]0, 1[$

3. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti, motivando la risposta.

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\right)^{n+\sqrt[4]{n}-1} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-x^2}{x-x\cos(2x)}.$$

(a) $\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}\right)^{\sqrt{4n^2+1}}\right]^{\frac{n+\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt{4n^2+1}}} \longrightarrow e^{1/2}$

(b) Da l'Hop. $\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}-2x}{1-\cos(2x)+2x\,\mathrm{sen}\,2x} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)\left[\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{x}\right]}$

$\downarrow x\to 0$

0

4. [4 pt] Stabilire per quali $x\in\mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^x}{n^2+\log n}$ è convergente, motivando la risposta.

$\dfrac{n^x}{n^2+\log n} \sim \dfrac{1}{n^{2-x}}$ per $n\to+\infty$

converge per $2-x>1$ ossia $x<1$

5. [5 pt] Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx$.

Posto $e^x = t$:

$$\int \frac{dt}{t^2+4t+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+3}$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{1}{2}\log(e^x+3) + c$$

Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx$

$$\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{e^x+1}{e^x+3}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2}$$

6. [4 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(z-i)^4 = (1+\sqrt{3}i)^4$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$$w := \left(\frac{z-i}{1+\sqrt{3}i}\right) \qquad w^4 = 1$$

$w_0 = 1$

$w_1 = i$

$w_2 = -1$

$w_3 = -i$

$z_k = w_k(1+\sqrt{3}i) + i$

$z_0 = 1 + (\sqrt{3}+1)i$

$z_1 = -\sqrt{3} + 2i$

$z_2 = -1 + (1-\sqrt{3})i$

$z_3 = \sqrt{3}$