ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 22/02/2017	COGNOME e Nome firma

Per gli esercizi da 2 a 6 scrivere, nei riquadri corrispondenti, i passaggi significativi dello svolgimento.

1. [8 pt] Sia $f(x) = \log(e^x - 1)$. $dom f =$ $\{x > 0\}$

f è limitata superiormente? NO e inferiormente? NO

f è simmetrica (pari o dispari)? NO

Determinare i limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (De L'Hopital)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) = 0$

$x=0$ AS. VERT ; $y=x$ AS. OBLIQUO

$f'(x) =$ $\frac{e^x}{e^x - 1}$

Stabilire gli intervalli di monotonia di f:

f è strettamente crescente in tutto il dominio

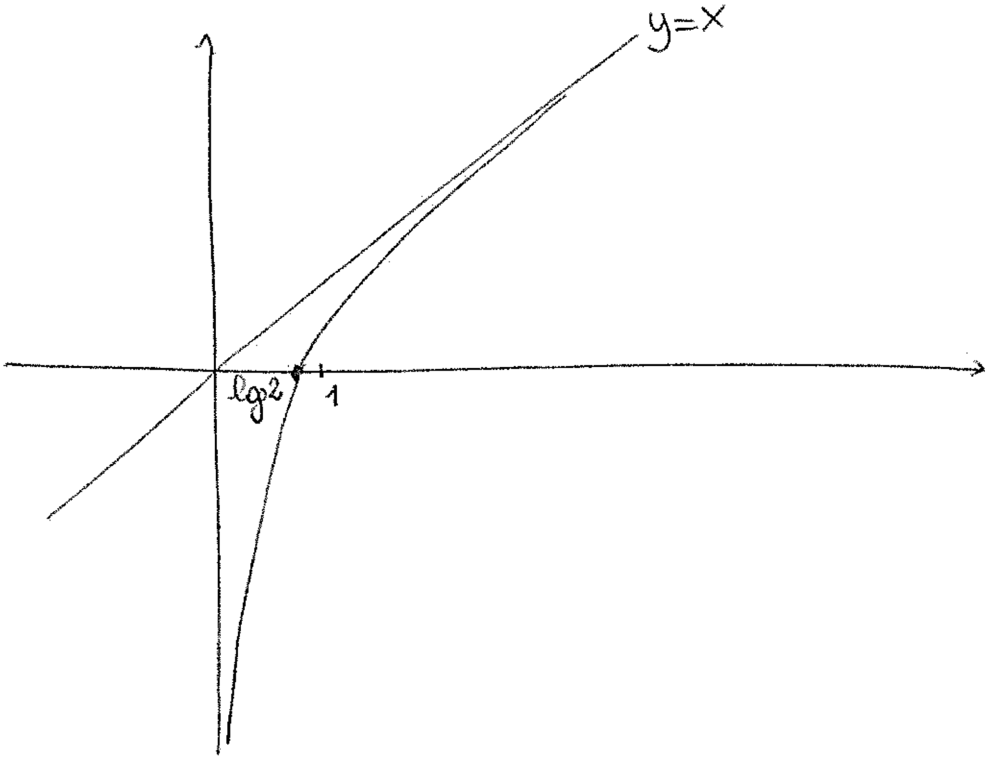
Dire se f è invertibile e, in caso affermativo, calcolare la sua inversa:

f è invertibile perché strett. monotona

$f(x) = y \iff \log(e^x - 1) = y \iff e^x - 1 = e^y \iff x = \log(e^y + 1)$

$f^{-1}(y) = \log(e^y + 1)$

Disegnare il grafico qualitativo di $f(x)$.



2. [4 pt] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{\log(1+x) - \log(1-x) - 2x}.$$

Il limite è in forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$

De L'Hopital: $\dfrac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2} = \underbrace{(1+x)(1-x)}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\dfrac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{2x^2}}_{(*)}$

Applico ancora due L'Hopital a $(*)$:

$\dfrac{2e^x \cos x + \cancel{e^x \sin x} - \cancel{e^x \sin x} - 2}{4x}$

L'ultima volta De L'Hopital:

$\dfrac{2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x}{4} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{Il limite è } \frac{1}{2}}$

3. **[5 pt]** Sia
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2+3}\,dt.$$
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa 0.

$y = F(0) + F'(0)\cdot x$

$F(0)=0$

$F'(x) = \frac{\sin x}{x^2+3}$ (T. fond. del calc. integrale) ; $F'(0)=0$

$\boxed{y=0}$

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}$ (usare il Teorema di De l'Hopital).

Il limite è nella forma $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{F'(x)}{2x} = \frac{\sin x}{2x(x^2+3)} \to \frac{1}{6}$$

4. **[4 pt]** Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n}{2n+(\log 3)^{4n}}$.

La serie è a termini positivi. Inoltre

$$a_n \sim \frac{n}{(\log 3)^{4n}} \qquad (\log 3 > 1)$$

Alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\log 3)^{4n}}$ applico il cr. della radice:

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{(\log 3)^4} \longrightarrow \frac{1}{(\log 3)^4} < 1 \implies$$ la seconda serie converge e quindi anche la prima x confronto asintotico

5. [5 pt] Discutere la convergenza dell'integrale $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

$f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}}$ è continua e positiva in $(-1,0]$

Per $x \to -1^+$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}$ $\Rightarrow$ l'integrale converge

$t = \sqrt{x+1}$; $t^2 = x+1$; $2t\,dt = dx$

$$\int_0^1 \frac{2\cancel{t}\,dt}{(1-t^2+1)\cancel{t}} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{2-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2}+t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\log|\sqrt{2}-t|\Big]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\log|\sqrt{2}+t|\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

6. [4 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $\bar{z}^2 - i\mathrm{Re}(z^2) = iz + (\mathrm{Re}\, z)^2$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$z = x + iy;\quad z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$\bar{z} = x - iy;\quad \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

$x^2 - y^2 - 2ixy - i(x^2 - y^2) = i(x+iy) + x^2$

$x^2 - y^2 - 2ixy - ix^2 + iy^2 = ix - y + x^2$

$$\begin{cases} \cancel{x^2} - y^2 = -y + \cancel{x^2} \\ -2xy - x^2 + y^2 = x \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0; -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ -2x - x^2 + 1 = x \end{cases}$$

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$z_1 = 0$

$z_2 = -1$

$z_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} + i$

$z_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} + i$