Esercizio 1

$$\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = 1+\sqrt{1-x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+\sqrt{1-x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x|^\alpha + c = \begin{cases} c & \alpha>0 \\ c+1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$

Se $\alpha>0$ f è continua in $x=0$ se e solo se

$$c = 2 = f(0)$$

Se $\alpha=0$ f è continua in $x=0$ se e solo se

$$c+1 = 2 = f(0) \qquad \text{ossia} \qquad c=1$$

Dunque i casi di continuità sono:

$$\alpha>0;\ c=2 \qquad e \qquad \alpha=0,\ c=1$$

Per la derivabilità:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-x}-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \left(\text{limite notevole}\right)$$

Per la derivata sinistra dobbiamo distinguere i due casi richiesti.

$\boxed{c = 2, \alpha = 1}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| + 2 - 2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow$ f non è derivabile in $x = 0$

$\boxed{c = 1, \alpha = 0}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 2}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$$

anche stavolta f non è derivabile in $x = 0$

Esercizio 2

a) $$\sqrt{n^2+\operatorname{sen}(2n)} - n = \frac{\cancel{n^2} + \operatorname{sen}(2n) \cancel{- n^2}}{\sqrt{n^2+\operatorname{sen}(2n)} + n} \longrightarrow 0$$

dato che $\{\operatorname{sen}(2n)\}$ è limitata e

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+\operatorname{sen}(2n)}+n} \sim \frac{1}{2n}$$ è infinitesima.

b) $$(\cos x)^{\cot g^2 x} = e^{\cot g^2 x \log(\cos x)}$$

$$\cot g^2 x \ \log \cos x = \frac{\log \cos x}{tg^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{0}{0}$$

De L'Hopital:

$$\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2\, tg x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{-\cancel{tg x}}{2 \cancel{tg x}} \cdot \cos^2 x \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Il limite richiesto è $\boxed{e^{-\frac{1}{2}}}$

Esercizio 3

$$f(t) = \frac{|t|^{5/2}}{t^2+t+1} \quad \bar{e} \text{ continua in } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f è integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato

$\Rightarrow$ F è definita in $\mathbb{R}$ e quindi non può avere asintoti verticali.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{|t|^{5/2}}{t^2+t+1}\, dt$$

$$f(t) \sim \frac{|t|^{5/2}}{t^2} = |t|^{1/2} \quad \text{per } t\to+\infty$$

f non è integrabile a $+\infty$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

De L'Hôpital: $\quad \dfrac{F'(x)}{1} = \dfrac{|x|^{5/2}}{x^2+x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Il secondo limite è $+\infty$.

Ex 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2+2n}$$

Applichiamo il cr. della radice:

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n+2} = \left[\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{n+4}\right]^{\frac{n+2}{n+4}} \longrightarrow e^{-1} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Ex 5

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x\,(4+\log^2 x)} = \int_2^4 \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right]$$

Ex 6:

$$z^3 = \frac{(2+i)(5-\frac{1}{2}i)}{1+\frac{1}{2}i} - 10$$

$$\frac{(2+i)(5-\frac{1}{2}i)}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{10+5i-i+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{\left(\frac{21}{2}+4i\right)\left(1-\frac{1}{2}i\right)}{1+\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{21}{2}+4i-\frac{21}{4}i+2}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{25}{2}-\frac{5}{4}i}{\frac{5}{4}} =$$

$$= 10 - i$$

$$z^3 = -i \qquad -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi$$

$$z_2 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi$$