Ex 1

f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

f continua in $x=0 \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/6}{x^2} = 0$$

$f(0) = a$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x + b = b$$

Pertanto f continua in $x=0 \iff a = b = 0$

Occorre solo verificare la derivabilità in $x=0$ (altrove f è derivabile)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x - x}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{6}$$

Pertanto $f'(0^+) = -\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} \implies f'(0^-) = \frac{1}{2}$$

Siccome $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, f non è derivabile in $x=0$

Ex 2

Per un confronto tra infiniti:

a) $= \lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{e^n} = +\infty$

b) $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x \arctg x}} = e^{\frac{1}{x \arctg x} \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$\frac{1}{x \arctg x} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\right) \sim \frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\sim -\frac{1}{6}x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x \arctg x} \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) \longrightarrow -\frac{1}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow$ il limite richiesto è $e^{-1/6}$

Ex 3

F è definita in $\mathbb{R}$ in quanto $f(t) = \dfrac{|t|^{3/2}}{t^2+1}$

è continua in $\mathbb{R}$ e come tale integrabile

su ogni intervallo limitato.

Non esistono asintoti verticali

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{|t|^{3/2}}{t^2+1}\,dt = +\infty$$ dato che

$f(t) \sim \dfrac{1}{t^{1/2}}$ per $t\to+\infty$ e $\dfrac{1}{t^{1/2}}$ non è integrabile a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usiamo de L'Hopital:

$$\frac{F'(x)}{1} = \frac{|x|^{3/2}}{x^2+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Perciò $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

Ex 4

Con il cr. del rapporto:

$$\frac{2^{-n-1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2^{-n}} = \frac{n+1}{2(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge

Ex 5

$$t = \log x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(\log^2 x - 2\log x)} = \int \frac{dt}{t^2 - 2t} \ominus$$

$$\frac{1}{t^2-2t} = \frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \frac{-1/2}{t} + \frac{+1/2}{t-2}$$

$$\ominus \; -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-2} = -\frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{2}\log|t-2| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\log|\log x| + \frac{1}{2}\log|\log x - 2| + c$$

Ex 6

$$\frac{5}{1-3i} - \frac{1+(6+\sqrt{3})i}{4} = \frac{20-\left[(1+6i+\sqrt{3}i)(1-3i)\right]}{4(1-3i)} =$$

$$= \frac{20-1+3i-6i-18-\sqrt{3}i-3\sqrt{3}}{4(1-3i)}$$

$$= \frac{(1-3i-\sqrt{3}i-3\sqrt{3})(1+3i)}{4(1+9)} =$$

$$= \frac{1+\cancel{3i}-\cancel{3i}+9-\sqrt{3}i+\cancel{3\sqrt{3}}-\cancel{3\sqrt{3}}-9\sqrt{3}i}{4\cdot 10} = \frac{10-10\sqrt{3}i}{4\cdot 10}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$z^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z_2 = -z_1$$