ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 06/02/2017	COGNOME e Nome	firma

Per gli esercizi da 2 a 6 scrivere, nei riquadri corrispondenti, i passaggi significativi dello svolgimento.

1. [8 pt] Sia $f(x) = \left|\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right| - 1$. $dom f =$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

f è limitata superiormente? NO e inferiormente? SI

f è simmetrica (pari o dispari)? NO

Determinare i limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{|2x-1|}{x^2} - 1 \right) = +\infty$

$x = 0$ A. VERT.

$y = -1$ A. ORIZZ

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2-2x}{x^3} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{2x-2}{x^3} & x < \frac{1}{2} ; \ x \neq 0 \end{cases}$$

Intervalli di monotonia di f:

f crescente in $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

f decrescente in $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

Eventuali punti di non derivabilità:

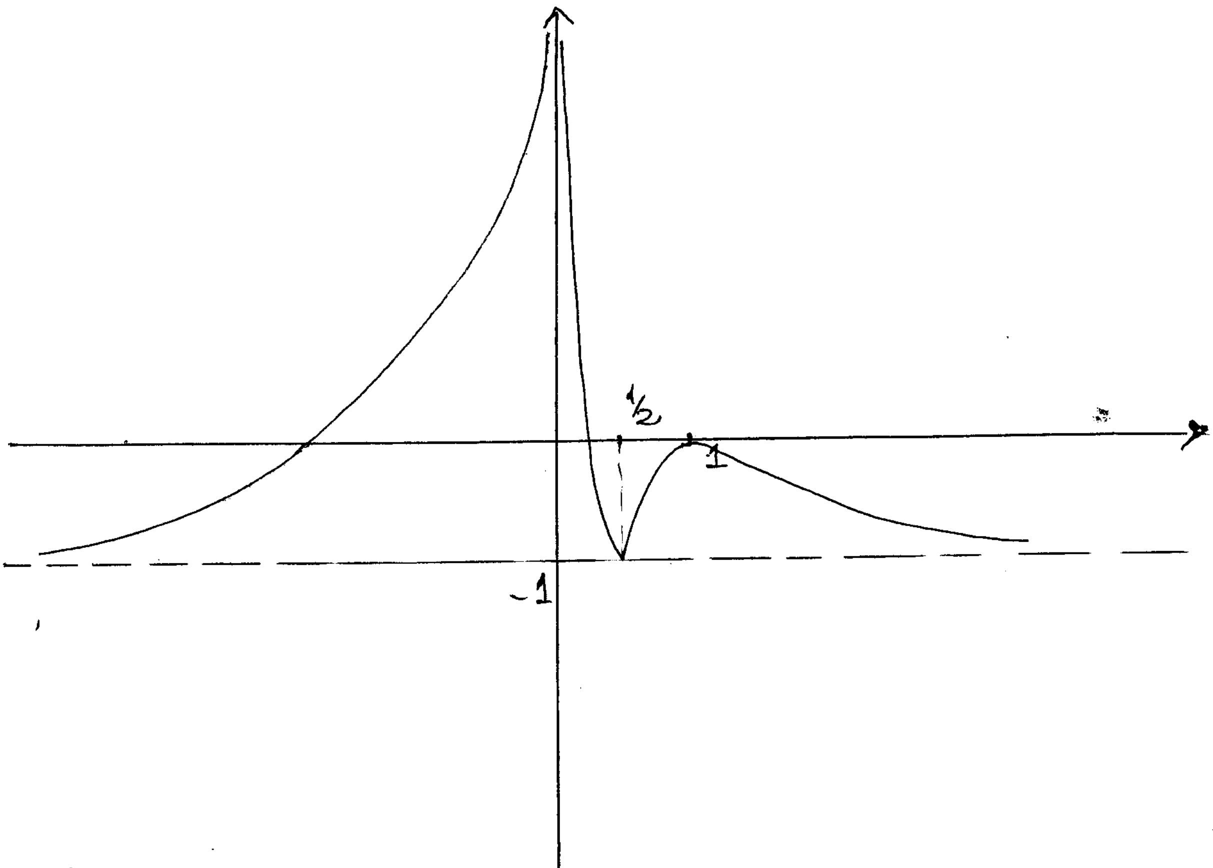
$x = \frac{1}{2}$ punto angoloso $f'(\frac{1}{2}^+) = 8$; $f'(\frac{1}{2}^-) = -8$

Eventuali estremi (locali o globali):

In $x = -\frac{1}{2}$ min. assoluto

In $x = 1$ max relativo

Disegnare il grafico qualitativo di $f(x)$.



2. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti;

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^{x^4}-1}{\tan^2(x)-\sin^2(x)}; \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\log(n)-\frac{1}{2}\log(n^2+5)\right)\cos(n).$$

(a)

$2^{x^4}-1=e^{x^4\log 2}-1 \sim x^4\log 2$ per $x\to 0$

$tg^2x-sen^2x = \dfrac{sen^2x\,(1-cos^2x)}{cos^2x} = \dfrac{sen^4x}{cos^2x} \sim x^4$ per $x\to 0$

Il limite è $\boxed{\log 2}$

(b)

$\left(\log n-\frac{1}{2}\log(n^2+5)\right)\cos n =$

$= \underbrace{\log\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+5}}\right)}_{\text{infinitesima}}\cdot \underbrace{\cos n}_{\text{limitata}}$

Il limite è $\boxed{0}$

3. **[4 pt]** Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 2 + \int_0^x t \cos t dt, & x \geq 0 \\ \pi x + b, & x < 0 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$. Dire se per il valore di b trovato, F è anche derivabile in $\mathbb{R}$.

Occorre verificare la continuità in $x=0$. Altrove F è continua

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = 2$

$\lim_{x\to 0^-} F(x) = b$

$\Rightarrow b = 2$

$F'(x) = x\cos x$ per $x>0$; $F'(x) = \pi$ per $x<0$

$F'(0^+) = 0$; $F'(0^-) = \pi$ $\Rightarrow$ F non è derivabile in $x=0$

4. **[4 pt]** Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\, e^{-n}}{n^3 + \sin n}$.

$$\frac{\sqrt{n}\, e^{-n}}{n^3 + \sin n} \sim \frac{e^{-n}}{n^{5/2}} \leq \frac{1}{n^{5/2}}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ converge ; per il cr. di confronto e quello del confr. asint. la serie data converge

5. **[4 pt]** Stabilire se l'integrale $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$ è convergente. In caso affermativo, calcolarlo.

$f(x) = x^3 e^{-x}$ è continua e positiva in $[0, +\infty)$

Per $x \to +\infty$: $x^3 e^{-x} = \underbrace{x^5 e^{-x}}_{\text{infinitesima e quindi limitata}} \cdot \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Per il cr. di confronto, f è integrabile all'∞.

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} + \int 3x^2 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + \int 6x e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + \int 6 e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6 + c$$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \left[(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 6$$

6. **[4 pt]** Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(2z + \bar{z})^3 = -i$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$w := 2z + \bar{z}$

$w^3 = -i$

$-i = \cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi$

$w_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$

$w_1 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$w_2 = \cos \frac{11}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$z = x + iy$

$2z + \bar{z} = 3x + iy$

$3x + iy = i$; $3x + iy = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; $3x + iy = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$x = 0$, $y = 1$ $\quad$ $x = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, $y = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y = -\frac{1}{2}$

$z_0 = i$ $\quad$ $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{2}$ $\quad$ $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{2}$