ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 08/09/2016	COGNOME e Nome	firma

1. [5 pt] (a) Determinare il dominio di $f(x) = \dfrac{\sqrt{\log(|x|)}}{x}$.

$\text{dom } f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

(b) Studiare i limiti di f agli estremi del dominio e stabilire se esistono asintoti verticali/orizzontali/obliqui.

$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ A. ORIZZ.

2. [6 pt] Calcolare la derivata prima di $h(x) = |x^2 - 3x - 4|$, specificando il dominio di h'.

$$h'(x) = \frac{x^2-3x-4}{|x^2-3x-4|} \cdot (2x-3) = \begin{cases} 2x-3 & x^2-3x-4>0 \\ 3-2x & x^2-3x-4<0 \end{cases}$$

$\text{dom } h' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

Studiare i punti di non derivabilità di h.

$x = -1$ punto angoloso $\quad f'_+(-1) = 5 \; ; \; f'_-(-1) = -5$

$x = 4$ " " $\quad f'_+(4) = 5 \; ; \; f'_-(4) = -5$

Determinare gli intervalli in cui h è crescente e quelli in cui h è decrescente.

Segno di h': $\quad -1 \quad 0 \quad 3/2 \quad 4$

$- - - -$ (−1) ———— (3/2) $- - - -$ (4) ———

$- \quad + \quad - \quad +$

h crescente in $(-1, 3/2] \cup (4, +\infty)$

h decrescente in $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, 4)$

3. [6 pt] Calcolare i seguenti limiti, motivando la risposta.

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-1}{2n+1}\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{e^x-e^3}.$$

(a) $\frac{n^4-1}{2n+1}\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{n^4-1}{(2n+1)n^3} \longrightarrow \frac{1}{2}$

(b) De L'Hopital : $\frac{2x-5}{e^x} \longrightarrow \frac{1}{e^3}$

4. [4 pt] Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^n}$, motivando la risposta.

Conv. ass: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$ questa serie conv. con il cr. del Rapporto

Dunque la serie conv. anche semplic.

5. [5 pt] Stabilire se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+2)}\,dx$ è convergente.

Per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+2)} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$

Dunque f è integrabile sia in 0 sia all'∞.

L'integrale converge

In caso affermativo, calcolarlo (usando la sostituzione $t = \sqrt{x}$).

$t = \sqrt{x} \quad \to \quad dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \quad \to \quad dx = 2t\,dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+2)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{2+t^2} = \sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

6. [4 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = -4 + 4i$ e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

$$-4+4i = 4\sqrt{2}\left(\cos \tfrac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{3}{4}\pi\right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos \tfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos \tfrac{11}{12}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{11}{12}\pi\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left(\cos \tfrac{19}{12}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{19}{12}\pi\right)$$