I

ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 18/07/2017	COGNOME e Nome firma

1. [8 pt] Sia $f(x) = \left|\frac{x^2-4}{x-1}\right|$. Determinare $dom f =$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

f è simmetrica (pari o dispari)? (giustificare la risposta)

f non è simmetrica dato che il suo dominio non è centrato in 0

Determinare i limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ $\quad x = 1$ asint. verticale

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{1-x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = 1$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x-x^2} = -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{1-x} = -1$

$y = x+1$ A OBL. DX $\quad y = -x-1$ A. OBL. SX

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} & x \in]-2,1[\cup]2,+\infty[\\ -\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2} & x \in]-\infty,-2[\cup]1,2[\end{cases}$$

Stabilire gli intervalli di monotonia di f ed eventuali estremi:

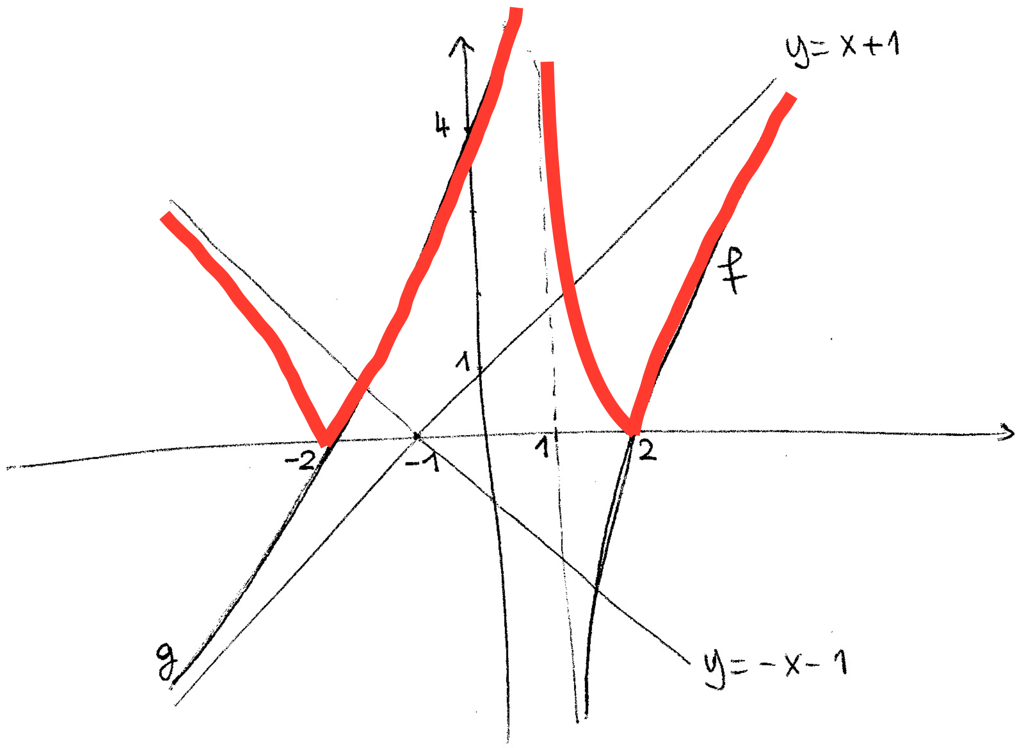
f crescente in $]-2,1[\cup]2,+\infty[$

f decrescente in $]-\infty,-2[\cup]1,2[$

$P(-2,0)$ $Q(0,0)$ pti di minimo assoluti

Tutte queste informazioni si possono ricavare anche studiando $g(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ e poi trasferendole a f.

Disegnare il grafico qualitativo di $f(x)$.



2. [4 pt] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{\frac{x+1}{x}}\right).$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{t/2} - \sqrt{1+t}}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{t}{2}} + \frac{t^2}{8} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)}{t^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

3. [5 pt] Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x t^5 \arctan t \, dt.$$

Calcolare $F'(x)$

Dal Teorema fond. del calcolo integrale:

$$F'(x) = x^5 \operatorname{arctg} x$$

Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^7}$.

Il limite si presenta nella F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applico il T. di De L'Hopital:

$$\frac{F'(x)}{7x^6} = \frac{x^5 \operatorname{arctg} x}{7x^6} = \frac{1}{7} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{7}$$

Verificare che F è convessa in $[0, +\infty)$.

$$F''(x) = 5x^4 \operatorname{arctg} x + \frac{x^5}{1+x^2} \geq 0 \quad \text{in } [0, +\infty)$$

4. [4 pt] Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctan \frac{1}{n}\right) \frac{n!}{(n-1)! + 3^n}$.

La serie è a termini positivi e il suo termine generale è asintotico a

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = 1$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge e quindi diverge anche la prima (CR. confr. asintotico)

5. **[5 pt]** Verificare che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^4+2x^2+1}\,dx$ è convergente e calcolarlo. (Sugg: porre $t=\sqrt{1+x^2}$)

$f(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{x^4+2x^2+1}$ è continua e positiva in $[1,+\infty)$

Siccome $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$ e $\dfrac{1}{x^2}$ è $\int$ o integrabile all'∞, deduciamo che l'integrale dato converge. $\boxed{\text{N.B.}}$ Verificare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ NON SERVE !

$t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow \cancel{2}t\,dt = \cancel{2}x\,dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x^2+1)^2}\,x\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{t}{t^4}\,t\,dt = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$
$$= 1/\sqrt{2}$$

6. **[4 pt]** Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^3 = -(1-i)^3$.

$$-(1-i)^3 = [-(1-i)]^3 = (-1+i)^3 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)\right]^3$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{9}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\,(\ldots)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\,(\ldots)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17}{12}\pi\right) = \sqrt{2}\,(\ldots)$$

$-\sqrt{2}$, $\quad \frac{-\pi}{4}$; $\frac{5}{12}\pi$; $\frac{13}{12}\pi$