Esercizio 1

Equaz. Caratteristica : $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$

soluzioni $\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i$

Il termine noto dell' eq. differenziale è:

$$e^x \sin x = e^x \, \mathrm{Im}(e^{ix}) = \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$$

Siccome $1+i$ non è soluzione dell' eq. caratteristica cerchiamo una sol. particolare dell' eq. diff. $z'' - z' + \frac{z}{2} = e^{(1+i)x}$ della forma $z(x) = A\, e^{(1+i)x}$

dove $A \in \mathbb{C}$; di tale $z(x)$ prenderemo la parte immaginaria.

$z'(x) = A(1+i)e^{(1+i)x}$; $z''(x) = A(1+i)^2 e^{(1+i)x}$
$= 2Ai\, e^{(1+i)x}$

$$z'' - z' + \frac{z}{2} = e^{(1+i)x} \iff 2Ai - A(1+i) + \frac{A}{2} = 1$$

$$\iff A = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5} i$$

$$z(x) = \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5} i\right) e^{(1+i)x} = \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5} i\right) e^x (\cos x + i \sin x) =$$

$$= \left(-\frac{2}{5} e^x \cos x + \frac{4}{5} e^x \sin x\right) + i \left(-\frac{4}{5} e^x \cos x - \frac{2}{5} e^x \sin x\right)$$

Una sol. particolare dell'eq. di partenza è:

$$y(x) = -\frac{2}{5}e^x \sin x - \frac{4}{5}e^x \cos x$$

OSS: In alternativa si poteva cercare la soluzione $y(x)$ nella forma $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che y soddisfi l'equazione.

Esercizio 2

Il limite presenta F.I. $\frac{0}{0}$

Applicando il T. di De L'Hopital:

$$\frac{4-4x-\frac{4}{1+x}}{3\cos x^3 \cdot 3x^2} = \frac{4(1-x)(1+x)-4}{9x^2(1+x)\cos x^3} = \frac{\cancel{4}-4x^2-\cancel{4}}{9x^2(1+x)\cos x^3} =$$

$$= \frac{-4}{9(1+x)\cos x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{4}{9}$$

Quindi il limite assegnato è $-\frac{4}{9}$.

OPPURE con gli sviluppi di MacLaurin:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$4x - 2x^2 - 4\log(1+x) = 4x - 2x^2 - 4\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{4x} - \cancel{2x^2} - \cancel{4x} + \cancel{2x^2} - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(x^3) = x^3 + o(x^3)$$

Quindi $$\lim_{x\to 0} \frac{4x - 2x^2 - 4\log(1+x)}{3\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{3x^3} = -\frac{4}{9}$$

ESERCIZIO 3

$$z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

$$z_{1/2} = -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 + 2i} = -(1+i) \pm \sqrt{4i}$$

$$= -(1+i) \pm 2\sqrt{i}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \pm\sqrt{i} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$z_1 = -1 - i + \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}(1+i) = (-1+\sqrt{2})(1+i)$$

$$z_2 = -1 - i - 2\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = (-1-\sqrt{2})(1+i)$$

ESERCIZIO 4

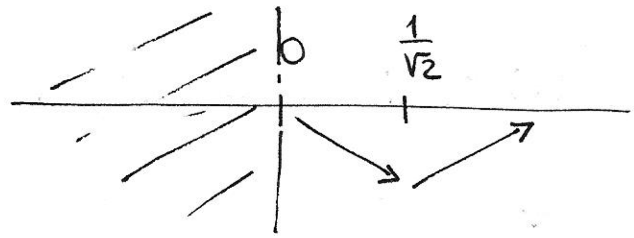
$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{4/5} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{4/5}}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \text{ asintoti}$$

$f(x)$ è pari $\Rightarrow$ la studiamo solo per $x>0$

$$f'(x) = \frac{1}{5}\left[(x^2-1)x^2\right]^{-\frac{4}{5}}(4x^3-2x) = \frac{4x^3-2x}{5\sqrt[5]{[(x^2-1)x^2]^4}}$$

Se $x>0$: $f'>0 \iff 2x^2-1>0 \iff x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$



osserviamo che f' non è definita per $x=0, \pm 1$.
Tali punti (dove f è continua !) devono essere studiati separatamente.

Per $x\to 0$ $\quad f(x) \sim -x^{2/5}$ $\Rightarrow$ $x=0$ cuspide

Per $x\to 1$ $\quad f(x) = \sqrt[5]{(x-1)(x+1)x^2} \sim \left[2(x-1)\right]^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$

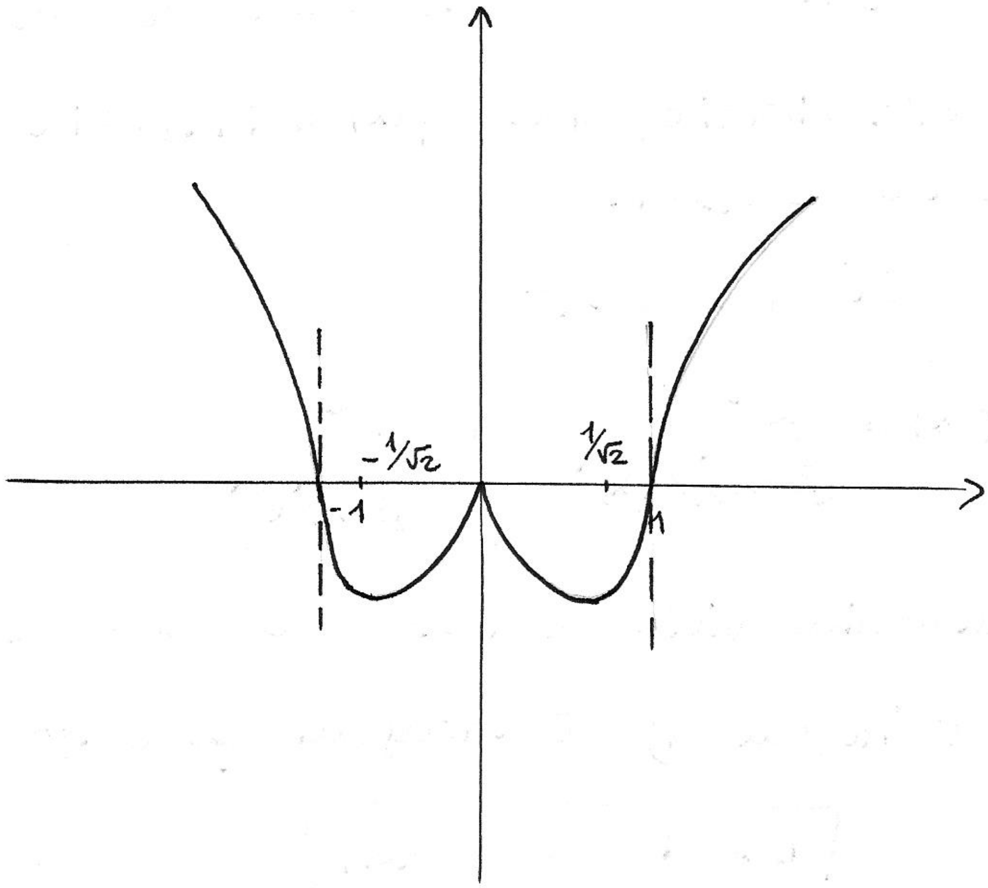
$\Rightarrow$ $x=1$ punto a tg verticale

Oppure: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x^2-1)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{2}{5}-1}$

$$= \lim_{x\to 0^+} (x^2-1)^{\frac{1}{5}} x^{-\frac{3}{5}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\frac{1}{5}}(x+1)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{2}{5}}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^{1/5} x^{2/5}}{(x-1)^{4/5}} = +\infty$$



ESERCIZIO 5

a) $$f(x)=\frac{x^a}{(9-x^2)^\alpha}>0 \quad \text{in } (0,3)$$

Cerchiamo stime asintotiche per f quando $x\to 0^+$ e $x\to 3^-$.

Se $x\to 0^+$ $$f(x)\sim\frac{x^a}{9^\alpha}=\frac{1}{9^\alpha x^{-a}}$$

$g(x)=\frac{1}{9^\alpha x^{-a}}$ è integrabile vicino a $x=0$ se e solo se $-a<1 \iff a>-1$

Per il confr. asintotico, anche $f(x)$ è integrabile vicino a 0 se e solo se $a>-1$.

Analogamente per $x\to 3^-$

$$f(x)=\frac{x^a}{(3-x)^\alpha(3+x)^\alpha}\sim\frac{3^a}{(3-x)^\alpha 6^\alpha}$$

è integrabile vicino a $x=3$ se e solo se $\alpha<1$

Quindi l'integrale a) è convergente se e solo se

$$\boxed{a>-1 \quad e \quad \alpha<1}$$

b) $$f(x)=\frac{x^a}{(x^2-9)^\alpha}$$

Per $x\to 3^+$: $$f(x)\sim\frac{3^a}{6^\alpha(x-3)^\alpha}$$

integrabilità vicino a $x=3 \iff \alpha<1$

Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^a}{x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{x^{2\alpha-a}}$

f è integrabile all'∞ se e solo se $2\alpha - a > 1$

Quindi l'integrale b) è convergente se e solo se

$$\boxed{\alpha < 1 \quad e \quad 2\alpha - a > 1}$$

ESERCIZIO 6

Se $\boxed{\alpha \leq 0}$ il termine generale della serie non è infinitesimo, in quanto

$$\left[\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right]^\alpha \longrightarrow \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Quindi per $\alpha \leq 0$ la serie non converge né semplicemente, né assolutamente.

Sia $\boxed{\alpha > 0}$. Per la convergenza assoluta:

$$\left|(-1)^n\left[\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right]^\alpha\right| = \left[\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right]^\alpha = \left[\log\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right]^\alpha$$

$$\sim \left(\frac{2}{n+1}\right)^\alpha \sim \left(\frac{2}{n}\right)^\alpha$$

La serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Quindi la serie data converge assolutamente per $\alpha>1$. In questo caso la serie converge anche sempl.

Se $0<\alpha\leq 1$, potrebbe esserci conv. semplice.

Sia $b_n=\left[\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\right]^{\alpha}$. Allora

(i) $b_n>0$ ✓

(ii) $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ✓

(iii) $\{b_n\}$ è decrescente

Verifichiamo (iii).

$\{b_n\}$ decrescente $\iff \left\{\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\right\}$ decrescente

$\iff \left\{\frac{n+3}{n+2}\right\}$ decrescente

$\iff \left\{1+\frac{2}{n+1}\right\}$ decrescente VERO!

Quindi, per il CR. di Leibniz, la serie converge.

In conclusione

	CONVERG. ASS.	CONVER. SEMPL
$\alpha>1$:	SI	SI
$0<\alpha\leq 1$:	NO	SI
$\alpha\leq 0$:	NO	NO