ANALISI MATEMATICA 1 Corso di Laurea in Ing. Edile e Architettura 22/06/2016 (A)	COGNOME e Nome	firma

1. [9 pt] Sia $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{|x^2-4|}$. Determinare: $dom f =$ $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

8

limiti agli estremi del dominio e eventuali asintoti:

$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty \atop x\to-\infty} f(x) = 1$

$x=2$, $x=-2$ ASINT. VERT

$y=1$ ASINT ORIZZ

$f'(x) =$ $\dfrac{-x^2-10x-4}{(x^2-4)^2}$ se $x^2-4>0$; $\dfrac{x^2+10x+4}{(x^2-4)^2}$ se $x^2-4<0$.

intervalli di monotonia:

$f' \geq 0$ in $[-5-\sqrt{21}, -2[\cup [-5+\sqrt{21}, 2[$ $\Rightarrow$ f crescente

$f' \leq 0$ in $]-\infty, -5-\sqrt{21}] \cup]-2, -5+\sqrt{21}] \cup]2, +\infty[$ $\Rightarrow$ f decresc.

punti di non derivabilità e loro natura:

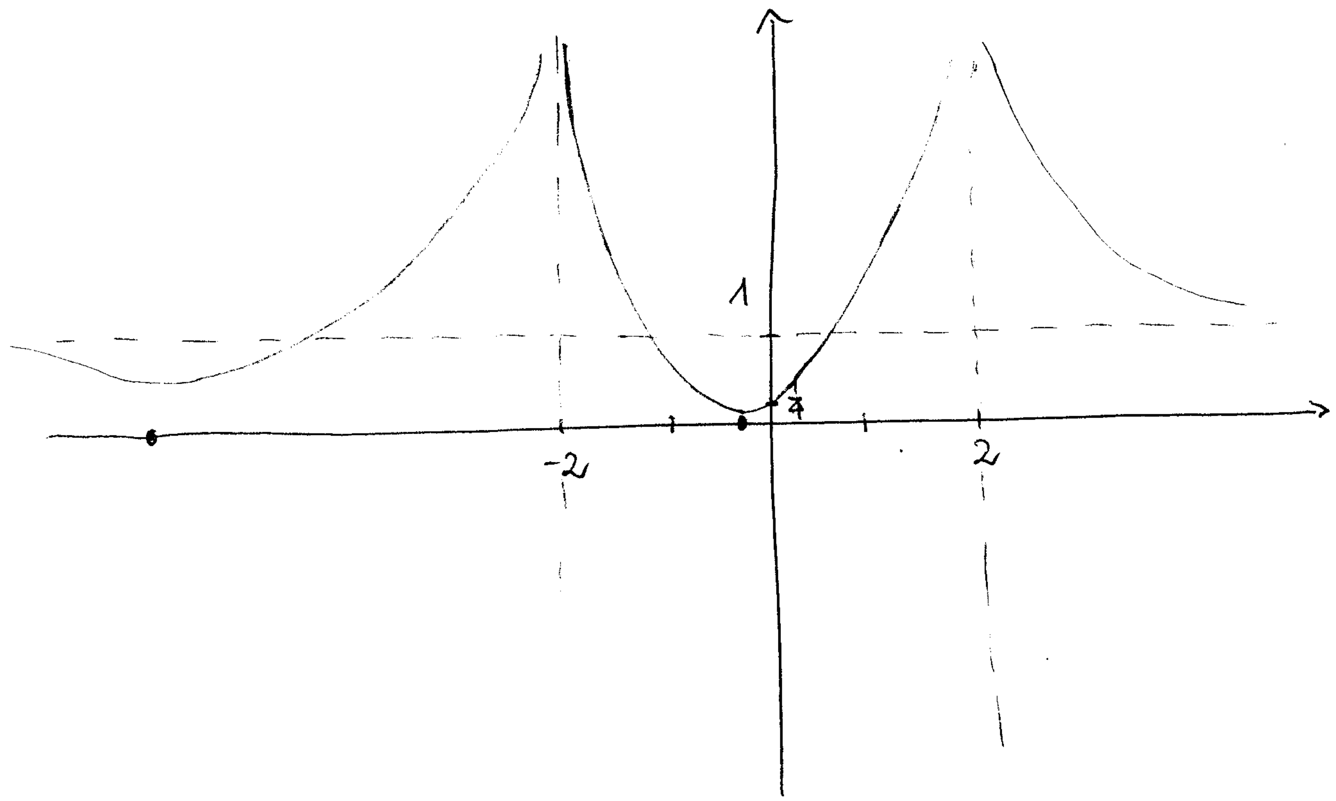
$\nexists$

estremi locali o globali:

$x = -5-\sqrt{21}$ pto di min loc

$x = -5+\sqrt{21}$ pto di min loc. (assoluto)

grafico qualitativo di f:



2. [5 pt] Di ciascuna delle seguenti funzioni studiare i limiti sinistro e destro in $x = 0$.

$$f_1(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{|x|}, \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{|x|}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0^-} f_1(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f_2(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_3(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f_3(x)$$

Nel caso in cui esista finito il limite in $x = 0$, dire se il prolungamento ottenuto è derivabile in $x = 0$.

Solo per f_2, f_3:

$\frac{f_2(x) - 0}{x - 0} = \frac{x}{|x|}$ non ammette limite in $x=0$ — $x=0$ pto angoloso per f_2

$\frac{f_3(x) - 0}{x - 0} = \frac{x^2}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ — f_3 è derivabile in $x=0$ con $f_3'(0)=0$

3. [4 pt] Calcolare i seguenti limiti

$$a) \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{(\sqrt{x}+x^2)\sin x} \qquad b) \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n+1)!\log n}.$$

$$\frac{1-\cos x}{(\sqrt{x}+x^2)\sin x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x(\sqrt{x}+x^2)} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x}+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{1+x^{3/2}} \to 0$$

$$\frac{(n+2)(n+1)\,n! - n!}{(n+1)\,n!\,\log n} = \frac{(n+2)(n+1) - 1}{(n+1)\log n} = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)\log n} \to +\infty$$

4. [4 pt] Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, motivando la risposta.

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n} \qquad \left(\sqrt[n]{n} \sim 1\right) \qquad \text{diverge}$$

5. [4 pt] Calcolare l'integrale $\int \frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4}\,dx$.

$$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4} = \frac{(x^2-4x+4)+2x-5}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{2x-5}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+4}$$

$$= 1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+4} - (x-2)^{-2}$$

$$\int \frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4}\,dx = x + \log(x^2-4x+4) + \frac{1}{x-2} + c$$

L'integrale $\int_0^2 \frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4}\,dx$ converge? Motivare la risposta.

$$I = \lim_{b\to 2^-} \left[x + \log(x^2-4x+4) + \frac{1}{x-2} \right]_0^b = -\infty$$

6. [4 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $|z-5|^2+|z+5|^2=2(z-5)^2$.

$$|x+iy-5|^2+|x+iy+5|^2=2(x+iy-5)^2$$

$$(x-5)^2+y^2+(x+5)^2+y^2=2(x^2+y^2+25+2ixy-10x-10iy)$$

$$\cancel{2x^2}\cancel{+50}+2y^2=\cancel{2x^2}-2y^2\cancel{+50}+4ixy-20x-20iy$$

$$4y^2+20x-4ixy+20iy=0$$

$$\begin{cases}\cancel{4}y^2+\cancel{20}^{5}x=0\\ -\cancel{4}xy+\cancel{20}^{5}y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y^2+5x=0\\ y(5-x)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}—\\ x=5 \vee y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=5\\ \nexists\, y\in\mathbb{R}\end{cases}\qquad\boxed{\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}}\quad \text{unica soluzione}$$