

Esercizi su funzioni reali di più variabili reali

Esercizio 1 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinarne il dominio e disegnarne il grafico.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3 - \sqrt{x^2 + y^2}; \\f(x, y) &= 4 - \frac{4}{9}(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Esercizio 2 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinarne il dominio e disegnarlo.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \sqrt[4]{\sin(x^2 + y^2)}; \\f(x, y) &= \sqrt{\log(x^2 + y^2)}; \\f(x, y) &= \sqrt{|x|(x^2 - y^2)}; \\f(x, y) &= \frac{x}{x^2 + 4y^2 - 1}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Scrivere la matrice hessiana di ciascuna delle seguenti funzioni, dopo averne definito il dominio.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log(2x^2 - 3y^2); \\f(x, y) &= xe^{xy}; \\f(x, y, z) &= \sin(2x + y - z).\end{aligned}$$

Esercizio 4 Verificare che ciascuna delle seguenti funzioni risolve l'equazione di Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \log \sqrt{x^2 + y^2}; \\f(x, y) &= \arctan \frac{x+y}{x-y}.\end{aligned}$$

Esercizio 5 Lungo quale versore la funzione $f(x, y) = x^y - 2y + 2x$ cresce di più "vicino" a $(1, 1)$?

Esercizio 6 Sia $f(x, y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3)$. Determinare α affinché il versore di massima crescita in $(0, 1)$ sia $\vec{v} = -\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}}$.

Esercizio 7 Scrivere l'equazione del piano tangente per ciascuna delle seguenti funzioni nel punto indicato a lato.

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x+3y}{x^2+y^2}, & (1, 0, 1); \\f(x, y) &= \sin x \cos y, & \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \\f(x, y) &= \log \frac{x}{y}, & \left(3, 2, \log \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 8 Calcolare la derivata direzionale di ciascuna delle seguenti funzioni lungo la direzione e nel punto indicati a lato.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{2x-y} & (1, 0), \quad \vec{v} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \\ f(x, y) &= \sqrt{3 + x^2 + y^2}, & (1, 2), \quad \vec{v} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right); \\ f(x, y) &= \frac{x+5y}{y-x}, & (-1, 0), \quad \vec{v} &= \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 9 Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = xy^2$ e determinare il versore lungo il quale la derivata direzionale di f nel punto $(2, 3)$ è massima (rispettivamente minima).