Lemma 1 *Sia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora le funzioni* $h(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, *con* $x \in [a,b]$, *e* $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, *con* $y \in [c,d]$, *sono continue.*

Teorema 1 (Formule di riduzione per funzioni continue su rettangoli) *Sia* f *una funzione continua nel rettangolo* $B = [a,b] \times [c,d]$. *Allora*

(a) la funzione $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *è integrabile in* $[c,d]$ *e vale*

$$\iint_B f = \int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy;$$

(b) la funzione $h(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ *è integrabile in* $[a,b]$ *e vale*

$$\iint_B f = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

In particolare è possibile scambiare l'ordine di integrazione.

Dim: Ci limiteremo a provare (a), visto che la dimostrazione di (b) è del tutto analoga. La funzione g è integrabile in $[c,d]$ perché continua grazie al Lemma 1. Sia $\mathcal{D}$ una suddivisione del rettangolo B determinata dai punti

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d.$$

Per la proprietà di additività dell'integrale, risulta

$$\int_c^d g(y)\,dy = \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g(y)\,dy. \tag{1}$$

Grazie al teorema della media integrale esistono punti $y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$ tali che

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} g(y)\,dy = g(y_j^*)(y_j - y_{j-1}). \tag{2}$$

Si ha poi

$$g(y_j^*) = \int_a^b f(x, y_j^*)dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y_j^*)dx. \tag{3}$$

Applicando ancora il teorema della media alla funzione $f(x, y_j^*)$ negli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ si trovano punti $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y_j^*)dx = f(x_i^*, y_j^*)(x_i - x_{i-1}). \tag{4}$$

Tenendo conto di tutte le formule (1)–(4), risulta provata la seguente uguaglianza

$$\int_c^d g(y)\,dy = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \tag{5}$$

Posto $B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $m_{ij} = \inf_{B_{ij}} f$ e $M_{ij} = \sup_{B_{ij}} f$, evidentemente si ha

$$m_{ij} \leq f(x_i^*, y_j^*) \leq M_{ij}.$$

Pertanto, ricordando (5) si ha

$$s(\mathcal{D}, f) \leq \int_c^d g(y)\, dy \leq S(\mathcal{D}, f),$$

dove $s(\mathcal{D}, f)$ e $S(\mathcal{D}, f)$ sono le somme inferiore e superiore secondo Riemann di f relative a $\mathcal{D}$. Data l'arbitrarietà di $\mathcal{D}$ ricaviamo

$$\underline{\int_B} f \leq \int_c^d g(y)\, dy \leq \overline{\int_B} f.$$

Infine, siccome f è integrabile in B si ha

$$\underline{\int_B} f = \overline{\int_B} f = \iint_B f,$$

da cui la tesi.