1. Sia $F = \left(\dfrac{2xy}{1+x^2} + 2xz, \log(1+x^2) - z, x^2 + g(y)\right)$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1. Determinare g affinché F sia conservativo e $F(0,0,0) = (0,0,0)$. Con la funzione g trovata, calcolare il potenziale φ di F tale che $\varphi(1,1,0) = \log 3$.

Soluzione. Dato che il dominio del campo F è $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso, per determinare g imponiamo che F abbia rotore nullo. Quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono verificate. Occorre dunque imporre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ F(0,0,0) = (0,0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} g'(y) = -1 \\ g(0) = 0 \end{cases} \implies g(y) = -y.$$

Un potenziale φ di $\left(\dfrac{2xy}{1+x^2} + 2xz, \log(1+x^2) - z, x^2 - y\right)$ deve soddisfare la condizione $\nabla\varphi = \left(\dfrac{2xy}{1+x^2} + 2xz, \log(1+x^2) - z, x^2 - y\right)$ e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1+x^2} + 2xz \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \log(1+x^2) - z \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 - y. \end{cases}$$

Integrando la terza equazione in z si ottiene

$$\varphi = x^2 z - yz + c(x,y).$$

Derivando rispetto a x e imponendo la prima equazione del sistema abbiamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xz + \frac{\partial c}{\partial x} \overset{\downarrow}{=} \frac{2xy}{1+x^2} + 2xz$$

da cui

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2}.$$

Integrando in x, $c(x,y) = y\log(1+x^2) + d(y)$ e quindi $\varphi = x^2z - yz + y\log(1+x^2) + d(y)$. Deriviamo in y e imponiamo la seconda equazione del sistema

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -z + \log(1+x^2) + d'(y) \overset{\downarrow}{=} \log(1+x^2) - z$$

da cui $d'(y) = 0$ e quindi $d(y)$ =cost. Tutti i potenziali del campo sono quindi $\varphi = x^2z - yz + y\log(1+x^2) + k$, $k \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $\varphi(1,1,0) = \log 3$ si trova $k = \log(3/2)$, per cui il potenziale richiesto è

$$\varphi = x^2z - yz + y\log(1+x^2) + \log(3/2).$$

$\square$

2. Sia $\mathbf{r}(t) = (2t, t^3, \sqrt{3}t^2)$, $t \in [0,2]$. Verificare che $\mathbf{r}(t)$ è una curva regolare. Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente a tale curva in $P = \mathbf{r}(1)$. Calcolare la lunghezza della curva.

   Soluzione. Siccome $r \in C^1([0,2])$ e $\mathbf{r}'(t) = (2, 3t^2, 2\sqrt{3}t)$ è diverso dal vettore nullo per ogni $t \in [0,2]$, la curva è regolare. In forma parametrica, la retta tangente in $P = \mathbf{r}(1)$ è data da

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = 2\sqrt{3}t + \sqrt{3}. \end{cases}$$

   Eliminando il parametro t si trova

$$\begin{cases} 2y = 3x - 4 \\ z = \sqrt{3}x - \sqrt{3}. \end{cases}$$

   Infine, la lunghezza della curva è data da

$$\int_0^2 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^2 \sqrt{(2+3t^2)^2} dt = \int_0^2 (2+3t^2) dt = 12$$

$\square$

3. Sia $F = \big(-\sin(y^2), x^2y\big)$ e sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Calcolare $\oint_{\partial C^+} F \cdot \tau$ e $\int_{\partial C} F \cdot \hat{n}_e \, ds$.

Soluzione. Calcoliamo la circuitazione con il teorema di Green:

$$\oint_{\partial C^+} F \cdot \tau = \iint_C \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_C \big(2xy + 2y\cos(y^2)\big) dxdy = 0$$

perché C è simmetrico rispetto all'asse x e la funzione integranda è dispari in y. Per il flusso usiamo il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial C} F \cdot \hat{n}_e \, ds = \iint_C \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\Big) dxdy = \iint_C x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^3 \cos^2\theta d\rho d\theta = \frac{15}{4}\pi.$$

□

4. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(t) = (t, -t^2, 2t^3)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $\nabla f(1, -1, 2) = (1, 1, -2)$. Sia $h(t) = f(g(t))$. Scrivere $h'(t)$ mediante la regola della catena. Calcolare $h'(1)$.

Soluzione. Usando il teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena) possiamo scrivere $h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$. Siccome $g(1) = (1, -1, 2)$ abbiamo poi

$$h'(1) = \nabla f(1, -1, 2) \cdot (1, -2, 6) = (1, 1, -2) \cdot (1, -2, 6) = -13.$$

□

5. Calcolare $\iiint_E z \, dxdydz$, dove $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 4, \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$.

Soluzione. Con la formula di riduzione per strati abbiamo

$$\iiint_E z \, dxdydz = \int_1^2 zdz \iint_{\{(x,y)\,:\, 4 \leq x^2+y^2 \leq 4z\}} dxdy = 4\pi \int_1^2 z(z-1)dz = \frac{10}{3}\pi$$

oppure per fili

$$\iiint_E z \, dxdydz = \iint_{\{(x,y)\,:\, 4 \leq x^2+y^2 \leq 8\}} dxdy \int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^2 zdz = \int_0^{2\pi} \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{1}{2}\Big(4 - \frac{\rho^4}{16}\Big) \rho d\rho d\theta = \frac{10}{3}\pi.$$

□

6. Sia $f(x, y) = (2x - x^2)(3y - y^2)$. Determinare e classificare i punti critici di f.

Soluzione. Determiniamo dapprima i punti critici di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (2-2x)(3y - y^2) = 0 \\ (2x - x^2)(3 - 2y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \vee y = 0 \vee y = 3 \\ x = 0 \vee x = 2 \vee y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

da cui i punti $P_1(1, \frac{3}{2}), P_2(0, 0), P_3(0, 3), P_4(2, 0), P_5(2, 3)$. La matrice hessiana è indefinita in P_2, P_3, P_4 e P_5 ed è definita negativa in P_1. Pertanto P_1 è un punto di massimo relativo mentre gli altri sono punti di sella. □