Esercizi

1. Dati il campo $F = (2xz, e^z + 4y^3, z + 2)$ e la regione $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$, calcolare $\operatorname{div} F$, il flusso di F uscente dalla superficie *totale* del cilindro ∂V, il flusso di F uscente dalla superficie *laterale* del cilindro ∂V.

   Soluzione: Risulta $\operatorname{div} F = 2z + 12y^2 + 1$. Applichiamo il teorema della divergenza al solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$ per ottenere il flusso uscente dalla superficie totale di ∂V. Integrando in coordinate cilindriche si ha

   $$\iint_{\partial V} F \cdot \hat{n}_e \, d\sigma = \iiint_V (2z + 12y^2 + 1) dxdydz = \int_{-2}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 12\rho^2(\sin\theta)^2\rho \, d\rho \, d\theta \, dz + \mathrm{Vol}(V) = 16\pi.$$

   Il flusso uscente dalla superficie laterale si trova per differenza, una volta trovati i flussi uscenti dalle due basi. Per calcolare questi ultimi usiamo la definizione di flusso come integrale di superficie e osserviamo che

   $$\begin{array}{llll} \text{su } z = -2: & \hat{n}_e = -\hat{k} & \Rightarrow & F \cdot \hat{n}_{e|z=-2} = -F_{3|z=-2} = 0 \\ \text{su } z = 2: & \hat{n}_e = \hat{k} & \Rightarrow & F \cdot \hat{n}_{e|z=2} = F_{3|z=2} = 4. \end{array}$$

   Pertanto il flusso uscente dalla base contenuta nel piano $z = -2$ è nullo, mentre quello uscente dalla base contenuta nel piano $z = 2$ è

   $$\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} 4 \, dxdy = 4\pi.$$

   Concludiamo che il flusso uscente dalla superficie *laterale* del cilindro ∂V vale $16\pi - 4\pi = 12\pi$.

2. Sia $f(x, y) = \log(8 + xy)$. Determinarne il dominio. Determinare e classificare i punti critici di f nel suo dominio. Determinare massimo e minimo di f in $Q = [-2, 2]^2$.

   Soluzione: Il dominio è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 8 + xy > 0\}$. In tale insieme l'unico punto critico è $(0, 0)$ ed è un punto sella dato che

   $$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-y^2}{(8 + xy)^2} & \dfrac{8}{(8 + xy)^2} \\ \dfrac{8}{(8 + xy)^2} & \dfrac{-x^2}{(8 + xy)^2} \end{pmatrix}$$

   e $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$ è indefinita. In Q esistono massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass e saranno raggiunti necessariamente sulla frontiera di Q. Applicando il metodo parametrico si vede che $A(2, -2)$ e $C(-2, 2)$ sono punti di minimo e $B(2, 2)$ e $D(-2, -2)$ punti di massimo. Il minimo e il massimo della funzione in Q valgono rispettivamente $\log(4)$ e $\log(12)$.

3. Sia $F = \left(\dfrac{a}{(\sqrt{3} + x)^2} y, \dfrac{1}{3} e^y + \dfrac{x}{\sqrt{3} + x}\right)$. Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ affinché F sia conservativo in $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Calcolare un potenziale di F per il valore di a trovato.

   Soluzione: Siccome E è convesso, E è semplicemente connesso e quindi F è conservativo in E se e solo se $\mathrm{rot} F = 0$ in E. Pertanto

   $$\mathrm{rot} F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{3}.$$

Determiniamo un potenziale $\varphi(x,y)$ del campo $F = \left(\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+x)^2}y, \frac{1}{3}e^y + \frac{x}{\sqrt{3}+x}\right)$. Integrando rispetto a x l'equazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+x)^2}y$$

si trova

$$\varphi(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x}y + c(y).$$

Derivando rispetto a y e imponendo che $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_2$ si ha

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x} + c'(y) = \frac{1}{3}e^y + \frac{x}{\sqrt{3}+x}$$

da cui

$$c'(y) = \frac{1}{3}e^y + \frac{x}{\sqrt{3}+x} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x} = \frac{1}{3}e^y + 1.$$

Integrando rispetto a y

$$c(y) = \frac{1}{3}e^y + y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo dunque trovato $\varphi(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x}y + \frac{1}{3}e^y + y + c$.

4. Siano $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4|x| \le y \le 2x+6\}$ e $f(x,y) = x$. Scrivere $\iint_E f\,dxdy$ con la formula di riduzione per fili verticali e per fili orizzontali. Calcolarlo.

Soluzione: I punti di intersezione tra $y = 4|x|$ e $y = 2x+6$ sono $(-1,4), (3,12)$. Quindi

$$\iint_E f\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-4x}^{2x+6} f\,dy\right)dx + \int_0^3\left(\int_{4x}^{2x+6} f\,dy\right)dx$$

integrando per fili verticali e

$$\iint_E f\,dxdy = \int_0^4\left(\int_{-\frac{1}{4}y}^{\frac{1}{4}y} f\,dx\right)dy + \int_4^{12}\left(\int_{\frac{y-6}{2}}^{\frac{1}{4}y} f\,dx\right)dy$$

integrando per fili orizzontali. Usando la seconda formula per il calcolo si ottiene

$$\iint_E f\,dxdy = \int_4^{12}\left(\int_{\frac{y-6}{2}}^{\frac{1}{4}y} x\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_4^{12}\left(\frac{y^2}{16} - \frac{(y-6)^2}{4}\right)dx = 8.$$

5. Sia $\sigma(u,v) = (uv, u+v, u-v)$, con $(u,v) \in R$, dove R è la parte del cerchio di raggio 2 e centro $(0,0)$ contenuta nel primo quadrante. Verificare che σ è una superficie regolare. Calcolare il piano tangente nel punto $P = \sigma(1,1)$ e l'area di σ.

Soluzione: La funzione σ è di classe C^1. Inoltre

$$\mathrm{Jac}\,\sigma = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha sempre rango 2. Pertanto σ è regolare. L'equazione del piano tangente in $P(1,2,0)$ è

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x+4y-4=0.$$

L'area infine è data da

$$\iint_R \sqrt{4+2u^2+2v^2}\,dudv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \sqrt{4+2\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{12}\big((12)^{\frac{3}{2}}-8\big) = \frac{\pi}{3}\big(6\sqrt{3}-2\big).$$

6. Sia $f(x,y,z) = z\arctan(xy)+(3-x)(z-y)$. Determinare il suo gradiente e la derivata direzionale di f in $(3,0,1)$ lungo il vettore che va da $A(1,1,-1)$ a $B(2,2,2)$.

   Soluzione: Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yz}{1+x^2y^2}-z+y, \frac{xz}{1+x^2y^2}-3+x, \arctan(xy)+3-x\right).$$

   Il vettore da $A(1,1,-1)$ a $B(2,2,2)$ è dato da $v = B-A = (1,1,3)$ e quindi (siccome f è differenziabile)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(3,0,1) = \nabla f(3,0,1)\cdot v = 2.$$