ORALE: ☐ GENNAIO (I appello) ☐ FEBBRAIO (II appello)

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta, VERSIONE A 24/01/2011	COGNOME e Nome	firma

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x - y^2)e^{-x}$. Calcolare

$\nabla f(x,y) =$ $\left((1-x+y^2)e^{-x},\ -2ye^{-x}\right)$

$Hf(x,y) =$ $e^{-x}\begin{pmatrix} x-y^2-2 & 2y \\ 2y & -2 \end{pmatrix}$

Trovare i punti di estremo di f e classificarli: $P(1,0)$ punto di max relativo

2. Sia T la regione del primo quadrante delimitata da $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2x^2$.

Scrivere T come dominio semplice rispetto all'asse x: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq 2;\ \sqrt{\frac{y}{2}}\leq x\leq 1\}$

Scrivere T come dominio semplice rispetto all'asse y: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 2x^2\}$

Calcolare $\iint_T \frac{x}{\sqrt{y+1}}\,dxdy$, indicando i passaggi salienti.

$$\int_0^1 x\left(\int_0^{2x^2}(y+1)^{-\frac{1}{2}}dy\right)dx = \int_0^1 2x(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 2x\,dx = \sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

3. Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{2e^x - 1}{e^x}\right)^n$ è convergente? $-\frac{1}{2}\leq \frac{2e^x-1}{e^x} < \frac{1}{2} \iff \log\frac{2}{5}\leq x<\log\frac{2}{3}$

Scrivere la somma della serie (per gli x per cui essa converge) $f(x)=$ $x-\log(2-3e^x)$

4. Scrivere l'equazione della retta tangente a $x^2 - y^2 = 7$ in $P(4,3)$. $4x-3y-7=0$

5. Si consideri la funzione $f(x,y,z) = \dfrac{e^{1-x^2-y^2}(1+z-x^4-y^3)}{\sqrt{2+32x^6+18y^4}}$. Sia S la superficie cartesiana $z = x^4+y^3$ ristretta a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$. Calcolare $\displaystyle\iint_S f\,dA$, indicando i passaggi salienti.

$$\iint_D \frac{e^{1-x^2-y^2}}{\sqrt{2+32x^6+18y^4}}\sqrt{1+16x^6+9y^4}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{1-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \left(1-e^{-3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

6. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + (1+z^2)\hat{k}$ uscente dalla superficie bordo dell'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le y \le 4-(x^2+z^2)\}$, indicando i passaggi salienti.

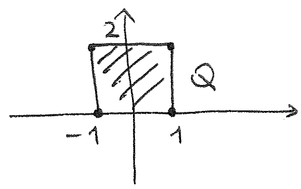
$$\iiint_V (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = 2\iint_{\{x^2+z^2\le 4\}}\left(\int_0^{4-(x^2+z^2)} y\,dy\right)dx\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-\rho^2)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{64}{3}\pi$$

7. Calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{F} = (x+y)\,\hat{\imath} + x^3\,\hat{\jmath}$ lungo il quadrato di vertici $(-1,0), (1,0), (1,2), (-1,2)$, orientato in senso antiorario e percorso una sola volta, indicando i passaggi salienti.

T. di Green:

$$\iint_Q (3x^2-1)\,dx\,dy = 2\int_{-1}^{1}(3x^2-1)\,dx = 0$$



Il campo è conservativo? NO

8. Determinare la funzione $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $g(0)=0$ e tale che il campo $\mathbf{F} = \dfrac{xy}{1+x^2}\,\hat{\imath} + (g(x)+e^y)\,\hat{\jmath}$ sia conservativo.

$g(x) =$ $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(Facoltativo) Calcolare il lavoro del campo *conservativo* **F** avente al posto di g la funzione del punto precedente lungo la curva $\gamma(t) = (t, \arctan t)$, $t \in [0,1]$.

$\frac{\pi}{8}\log 2 + e^{\frac{\pi}{4}} - 1$