ORALE: ☐ GIUGNO (I APPELLO) ☐ LUGLIO (II APPELLO)

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta, VERSIONE A 15/06/2011	COGNOME e Nome	firma

1. **[4 pt]** Si consideri la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2-y)y$. Determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e classificarli, motivando la risposta.

Punti critici $(0,0)$; $(0,\frac{2}{3})$

$(0,\frac{2}{3})$ è punto di minimo relativo in quanto $Hf(0,\frac{2}{3})$ è def. positiva

$(0,0)$ è punto di sella in quanto $f(0,0)=0$ e f cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$

2. **[5 pt]** Si consideri la superficie cartesiana Σ di equazione $z = 1-x^2-2y^2$, $(x,y)\in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 5\}$.

- Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente nel punto $P(1,0,0)$

$f(x,y) = 1-x^2-2y^2$; Usando la formula $z = f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$

si trova $z = -2x+2$

- Calcolare $\iint_\Sigma \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{5x^2+18y^2+z}}d\sigma$, indicando i passaggi salienti.

$d\sigma = \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+4x^2+16y^2}\,dx\,dy$

$$\iint_D \frac{(x^2+2y^2)\sqrt{1+4x^2+16y^2}}{\sqrt{5x^2+18y^2+1-x^2-2y^2}}dx\,dy = \iint_D (x^2+2y^2)dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} \rho^3(\cos^2\theta+2\operatorname{sen}^2\theta)d\rho\,d\theta = \frac{75}{4}\pi$$

3. **[5 pt]** Calcolare $\iiint_\Omega z\,dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq 3, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\leq z^2 \leq 2(x^2+y^2)\}$, indicando i passaggi salienti.

Formula di integrazione per strati: $A_z = \{(x,y) \mid \frac{1}{2}z^2 \leq x^2+y^2 \leq 2z^2\}$

$$\int_0^3 z\left(\iint_{A_z} dx\,dy\right)dz = \int_0^3 z\,\pi\left(2z^2-\frac{1}{2}z^2\right)dz = \frac{243}{8}\pi$$

4. **[5 pt]** Dato il campo $\mathbf{F} = \left(\frac{y}{2\sqrt{x}}+yz^2, \sqrt{x}+xz^2+2y, 2xyz\right)$,

- determinarne il dominio: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0\}$
- stabilire se è conservativo: Sì, perché $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ e $\operatorname{dom}\vec{F}$ è semplic. connesso

- calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ da $A(1,0,1)$ a $B(1,1,2)$, motivando la risposta

Basta trovare un potenziale di $\vec{F}$: $U(x,y,z) = \sqrt{x}\, y + xyz^2 + y^2$

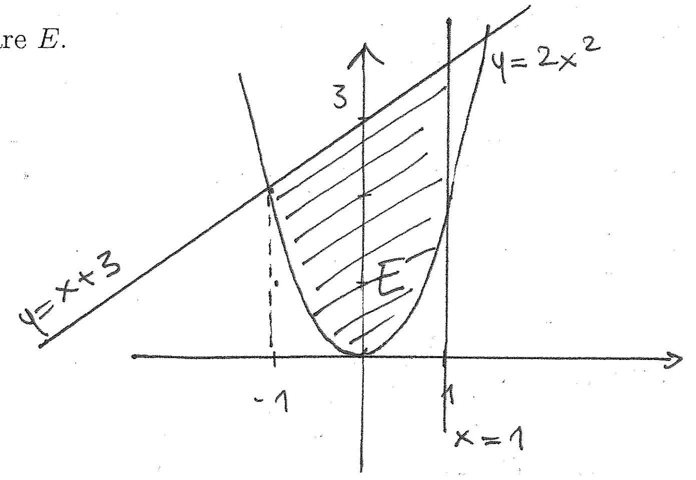
$\mathcal{L} = U(B) - U(A) = 6$

5. **[4 pt]** Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{2^n+3^n}(x-1)^n$. Determinare

- il raggio di convergenza $R = \frac{3}{2}$ e l'insieme di convergenza $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

6. **[4 pt]** Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 \le y \le x+3, x \le 1\}$.

- Disegnare E.



- Calcolare $\iint_E y\, dxdy$, indicando i passaggi salienti

$$\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x+3} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x+3)^2 - 4x^4\right] dx = \frac{128}{15}$$

Domanda di teoria **[3 pt]** Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* in (x_0, y_0) se

1) $\exists\, \nabla f(x_0, y_0)$;

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0.$$